PROBLEMES DE NIVELL A (1r i 2n d'ESO)

Problemes de geometria

Solucions **pas a pas**, amb un desenvolupament per diapositiva

Solucions en valencià

ELS SIS PROBLEMES

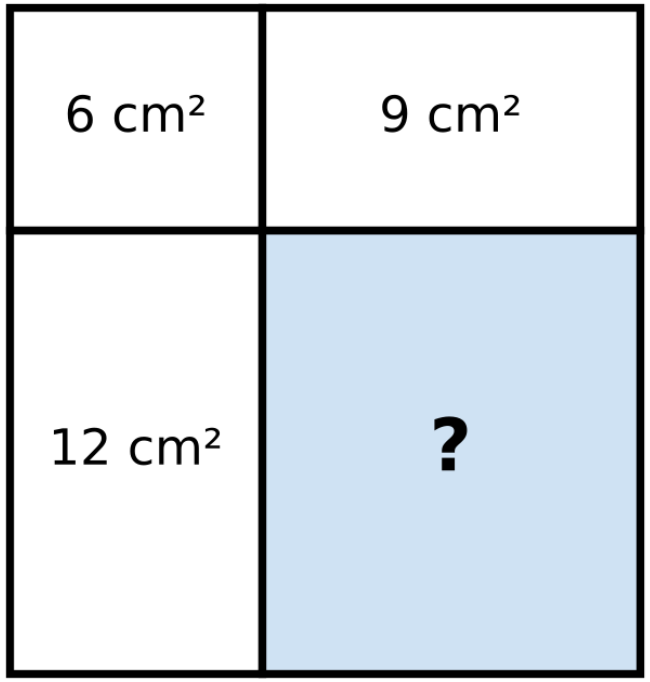
1. El rectangle trossejat
2. El triangle isòsceles
3. El cub pintat
4. Quadrats encaixats
5. L'estrela de cinc puntes
6. Diagonal i segment en un quadrat

Problema 1. El rectangle trossejat

Un rectangle es divideix en quatre rectangles més xicotets mitjançant una recta paral·lela a la base i una altra paral·lela a l'altura, com en la figura. El rectangle de dalt a l'esquerra té una àrea de 6 cm², el de dalt a la dreta 9 cm² i el de baix a l'esquerra 12 cm².

a) Quina és l'àrea del rectangle de baix a la dreta?

b) Quina és l'àrea del rectangle gran?



ABANS DE COMENÇAR

Cal conéixer les mesures dels costats? Fixa't en dos rectangles que tinguen **la mateixa altura**.

Pas 1. La fila de dalt

PROBLEMA 1

Anomenem **a** i **b** les amplàries de les columnes, i **h** i **k** les altures de les files.

LES DADES:

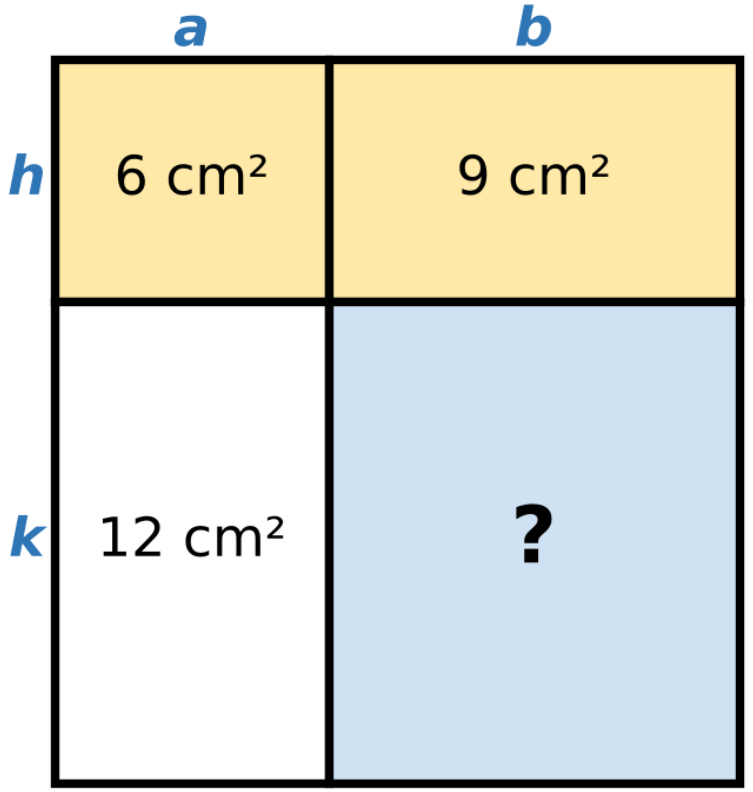
$a \cdot h = 6$

$b \cdot h = 9$

$a \cdot k = 12$

IDEA

Els dos rectangles de dalt tenen **la mateixa altura h**: les seues àrees són proporcionals a les amplàries.



$$\frac{b}{a} = \frac{b \cdot h}{a \cdot h} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

La columna dreta és **1,5 vegades** més ampla que l'esquerra.

Pas 2. La fila de baix

PROBLEMA 1

Els dos rectangles de baix també tenen **la mateixa altura k**: el de la dreta té 3/2 de l'àrea del de l'esquerra.

$$x = 12 \cdot \frac{3}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

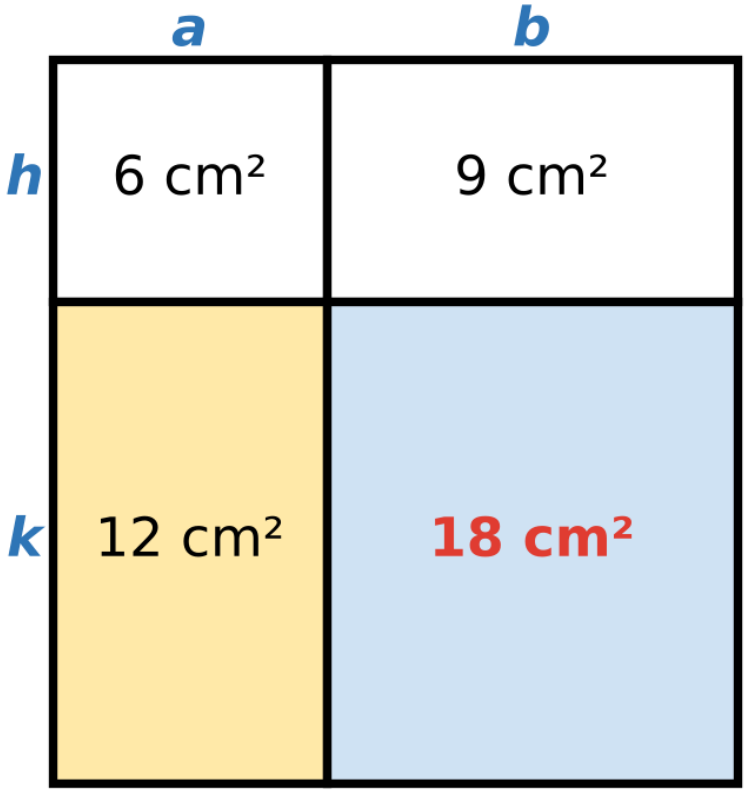
SOLUCIÓ a)

$\boxed{18 \text{ cm}^2}$



ATENCIÓ

No cal conéixer **a**, **b**, **h** ni **k**: n'hi ha prou amb les proporcions.



Una altra manera: productes en diagonal

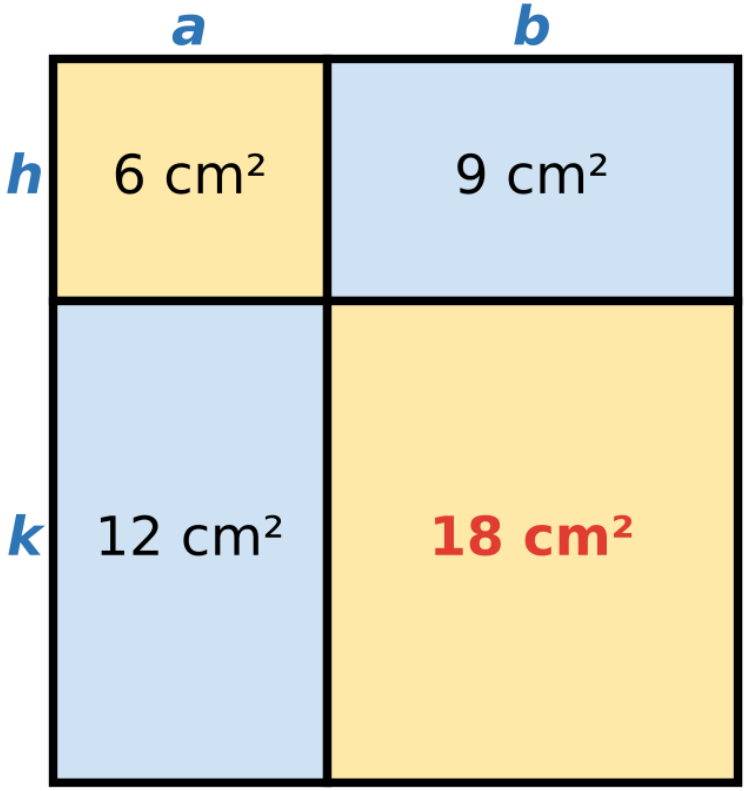
PROBLEMA 1

Multipliquem les àrees que estan en diagonal:

$$(a \cdot h) \cdot (b \cdot k) = a \cdot b \cdot h \cdot k$$

$$(b \cdot h) \cdot (a \cdot k) = a \cdot b \cdot h \cdot k$$

$$6 \cdot x = 9 \cdot 12 \;\Rightarrow\; x = \frac{108}{6} = 18 \text{ cm}^2$$



IDEA

Quan un rectangle es talla així, **els productes de les àrees en diagonal són iguals**: 6 · 18 = 9 · 12.

Pas 3. L'àrea total

PROBLEMA 1

Sumem les quatre àrees:

$$6 + 9 + 12 + 18 = 45 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓ b)

$\boxed{45 \text{ cm}^2}$

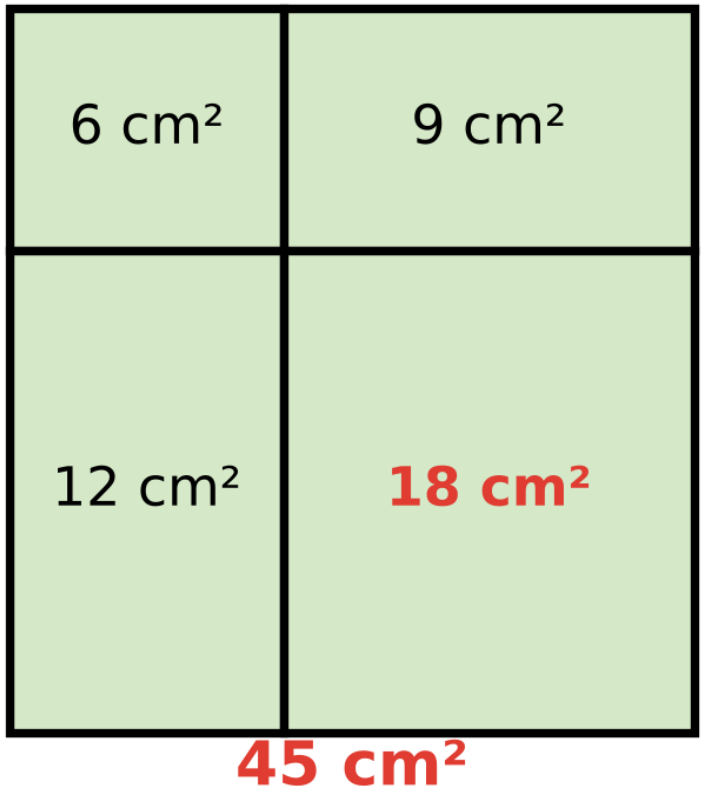
COMPROVACIÓ

Unes mesures possibles:

a = 2, b = 3, h = 3, k = 6

Rectangle gran:

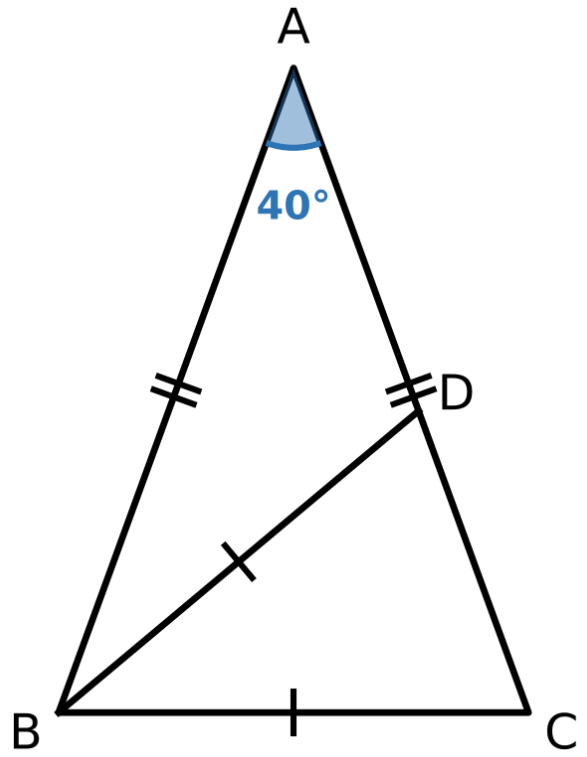
5 · 9 = 45 ✓



Problema 2. El triangle isòsceles

En el triangle ABC es compleix AB = AC i l'angle en A mesura 40°. Sobre el costat AC es pren un punt D de manera que BD = BC.

Quant mesura l'angle ABD?



ABANS DE COMENÇAR

Marca en el dibuix els costats iguals. Quants triangles isòsceles hi veus?

Pas 1. Els angles del triangle ABC

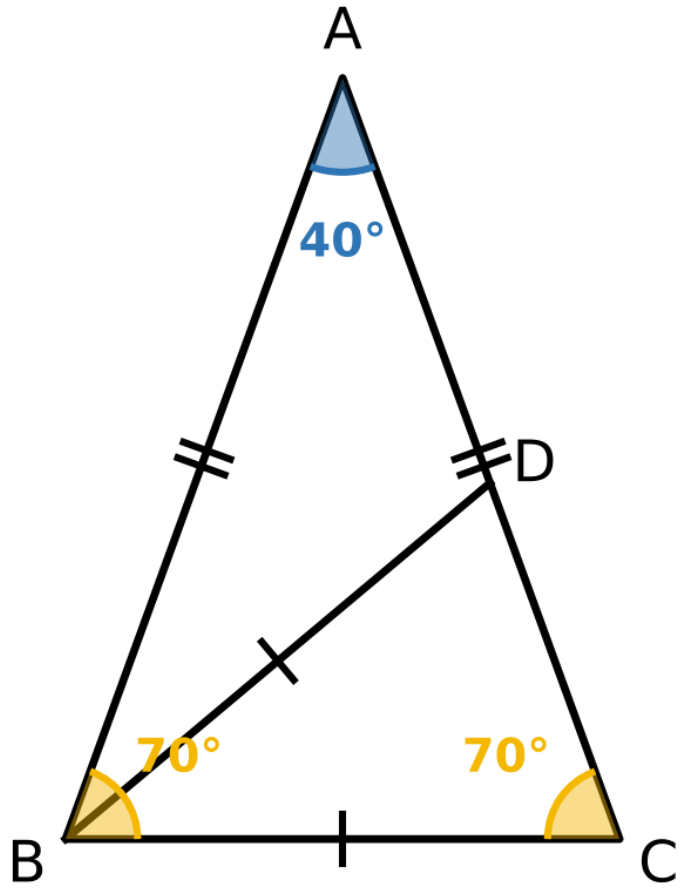
PROBLEMA 2

Com que **AB = AC**, el triangle ABC és isòsceles i **els angles de la base són iguals**.

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B + \angle C = 180° - 40° = 140°$$

$$\angle B = \angle C = \frac{140°}{2} = 70°$$



ATENCIÓ

Els tres angles d'un triangle sumen sempre **180°**.

Pas 2. El triangle BCD

PROBLEMA 2

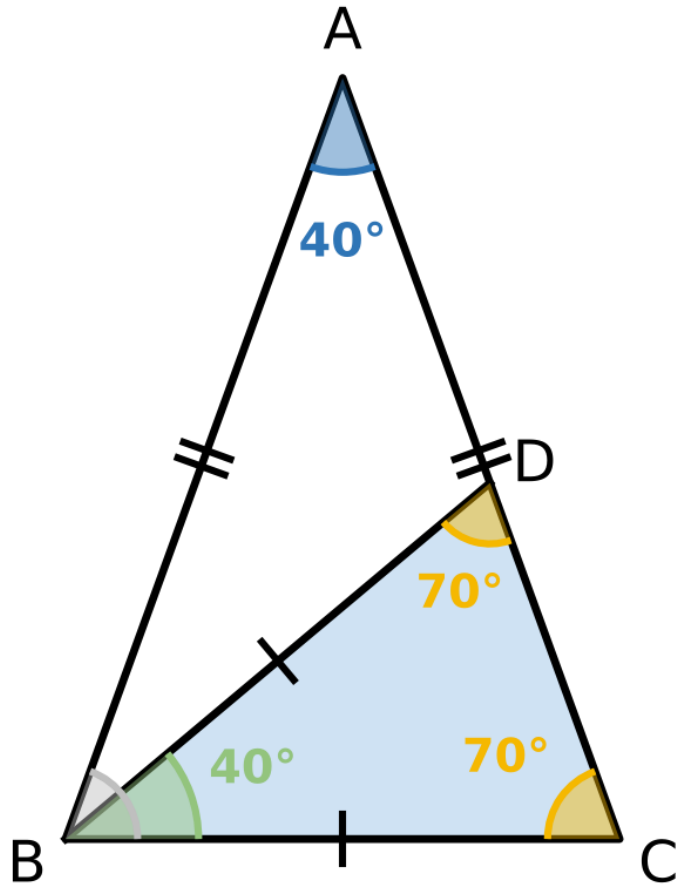
Com que **BD = BC**, el triangle BCD també és isòsceles. Els angles iguals són els **oposats** a aqueixos costats: els angles en D i en C.

$$\angle BDC = \angle BCD = 70°$$

$$\angle DBC = 180° - 70° - 70° = 40°$$

ATENCIÓ

El costat BD és oposat a l'angle en C i el costat BC és oposat a l'angle en D.
L'angle desigual és el de B!



Pas 3. L'angle ABD

PROBLEMA 2

L'angle en B del triangle gran (70°) queda dividit en dues parts per BD:

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 70° - 40° = 30°$$

SOLUCIÓ

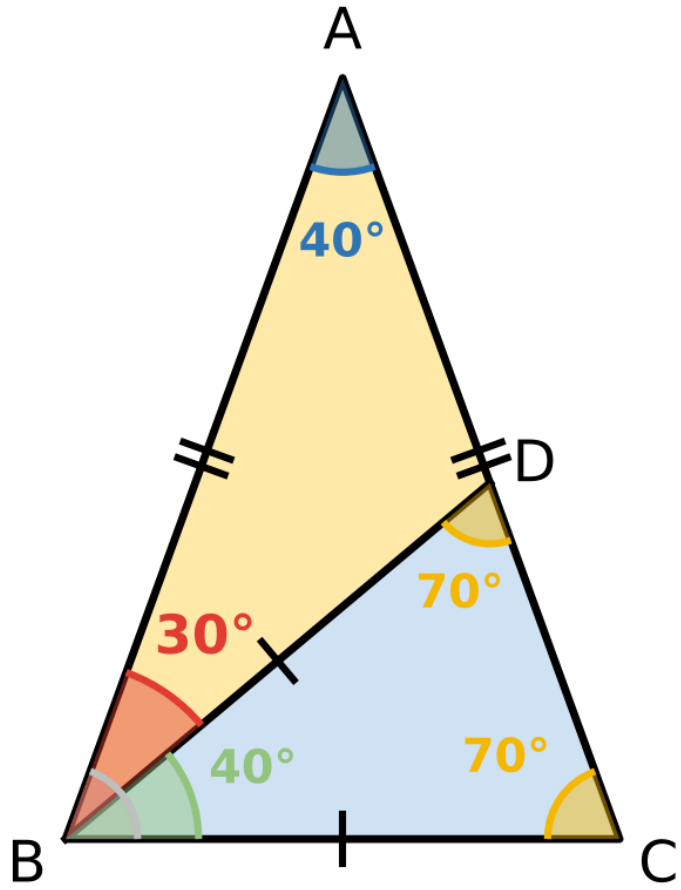
$$\boxed{\angle ABD = 30°}$$

COMPROVACIÓ

En el triangle ABD:

∠ADB = 180° − 70° = 110°

40° + 30° + 110° = 180° ✓

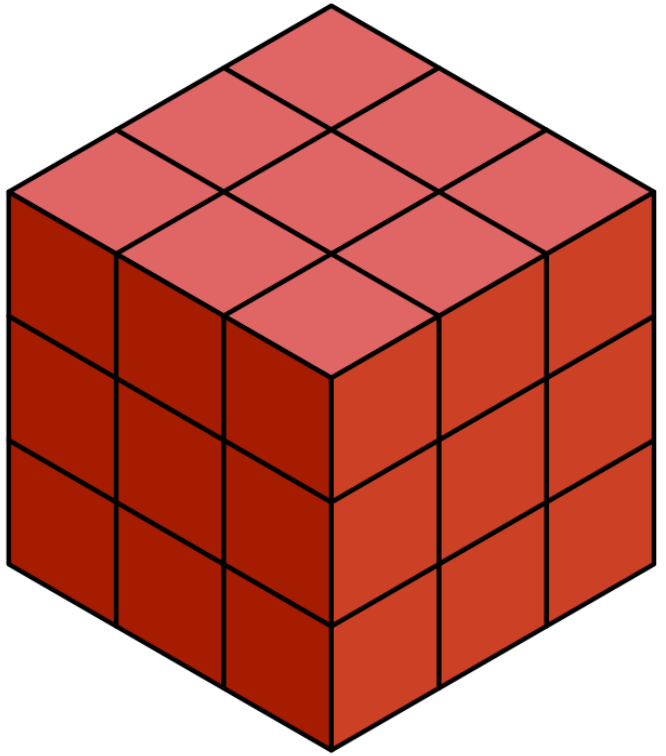


Problema 3. El cub pintat

Es construeix un cub gran apegant 27 cubets iguals (3 × 3 × 3). Després es pinta de roig tota la superfície exterior del cub gran i es torna a separar en cubets.

a) Quants cubets tenen exactament 3 cares pintades? I 2? I 1? I cap?

b) Repeteix l'apartat anterior per a un cub de 4 × 4 × 4.



ABANS DE COMENÇAR

On està un cubet amb 3 cares pintades? I un que no en tinga cap?

Pas 1. Cantonades i arestes

PROBLEMA 3

Comptem segons **on està** cada cubet dins del cub gran (n=3):

8

3 cares

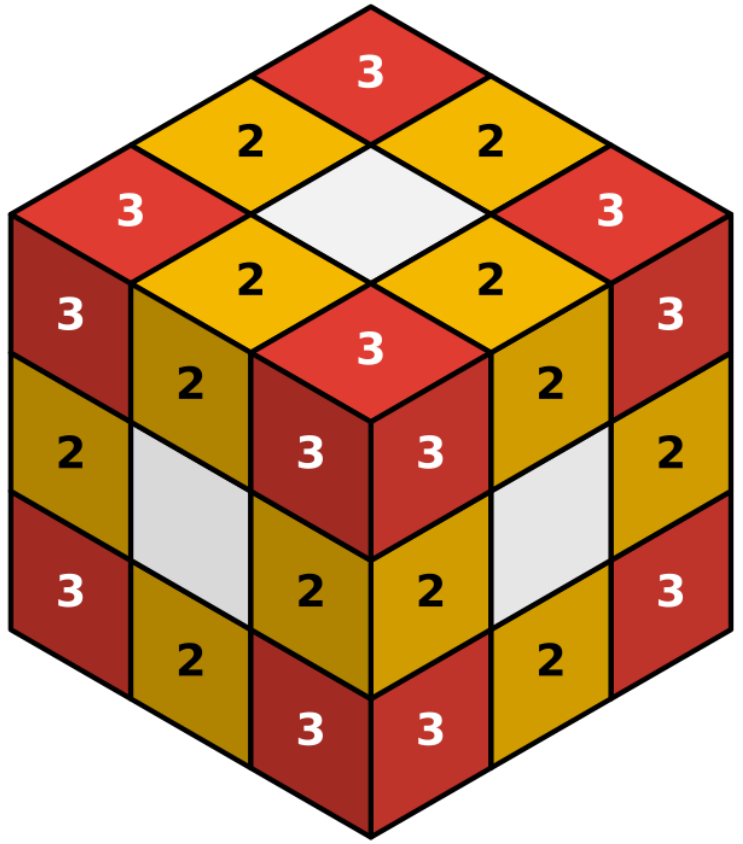
Les cantonades: el cub té 8 vèrtexs.

12

2 cares

Les arestes sense les cantonades.

$$12 \text{ arestes} \times 1 \text{ cubet} = 12$$



Pas 2. Cares i centre

PROBLEMA 3

6

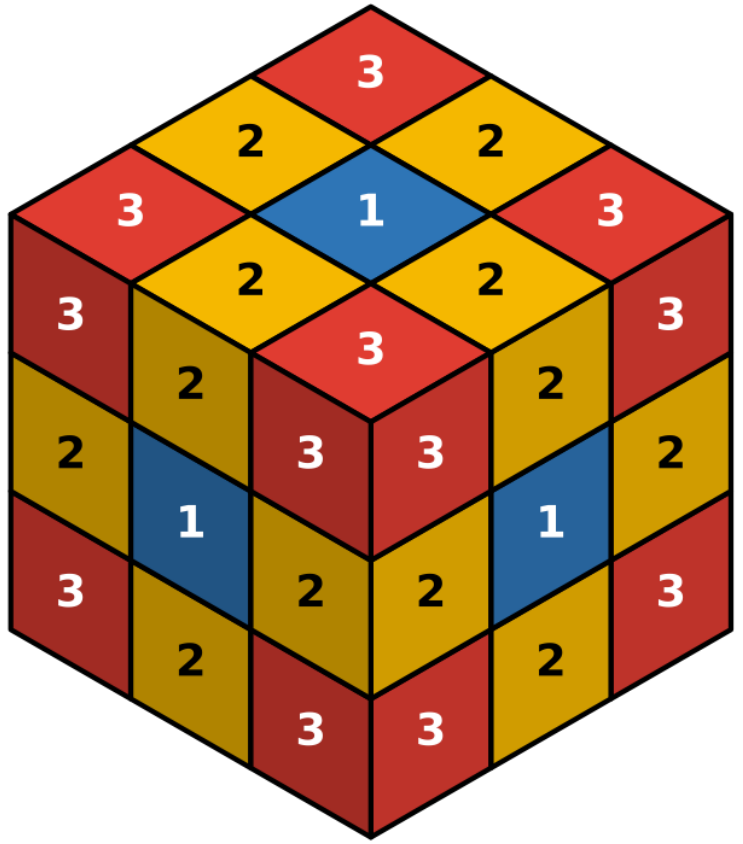
1 cara

El centre de cada cara: 6 cares.

1

Cap cara

Només el cubet central.



COMPROVACIÓ

$$8 + 12 + 6 + 1 = 27 \checkmark$$

SOLUCIÓ a)

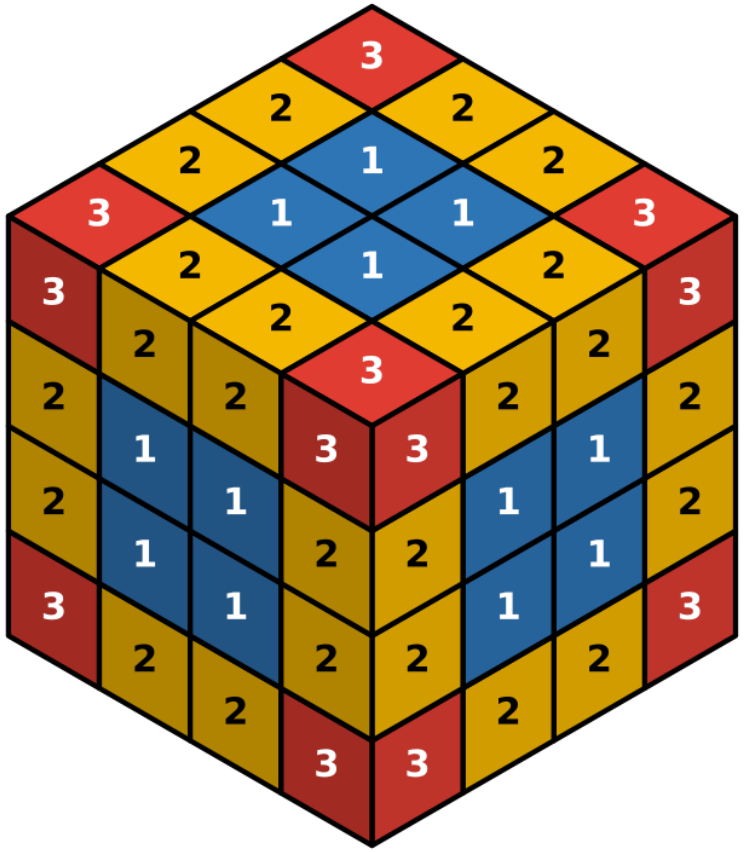
3 cares: 8	2: 12	1: 6	cap: 1

Pas 3. El cub 4 × 4 × 4

PROBLEMA 3

Ara hi ha $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ cubets. A cada aresta queden **2** cubets que no són cantonades.

3 cares: cantonades	8
2 cares: arestes	$12 \cdot 2 = 24$
1 cara: cares	$6 \cdot 4 = 24$
Cap: cub interior	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



COMPROVACIÓ

$8 + 24 + 24 + 8 = 64$ ✓

SOLUCIÓ b)

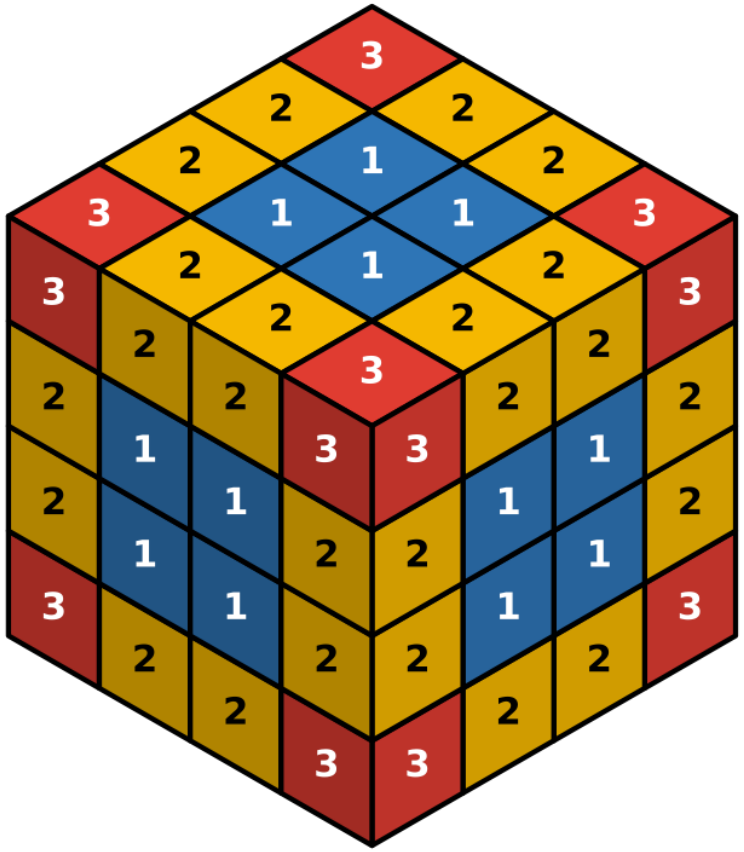
$\boxed{8,\ 24,\ 24,\ 8}$

Per a pensar: un cub n × n × n

PROBLEMA 3

A cada aresta hi ha n − 2 cubets que no són cantonades, i a cada cara un quadrat de (n − 2) × (n − 2).

3 cares	8
2 cares	$12\,(n-2)$
1 cara	$6\,(n-2)^2$
Cap	$(n-2)^3$



PER A PENSAR

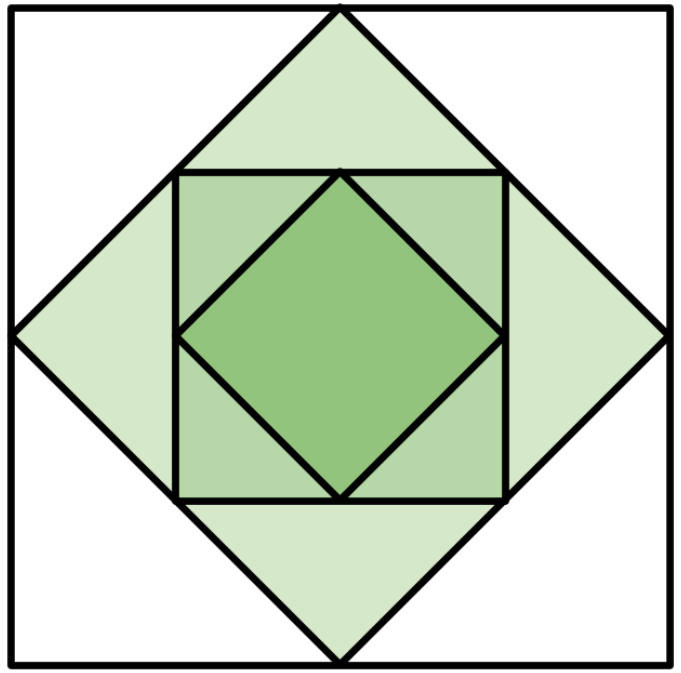
Per a n = 3 i n = 4 recuperem els resultats anteriors. Prova amb n = 5!

Problema 4. Quadrats encaixats

Tenim un quadrat de 10 cm de costat. Unint els punts mitjans dels seus costats obtenim un segon quadrat. Unint els punts mitjans dels costats del segon n'obtenim un tercer, i de la mateixa manera un quart.

a) Quina és l'àrea del quart quadrat?

b) Quant sumen les àrees dels quatre quadrats?



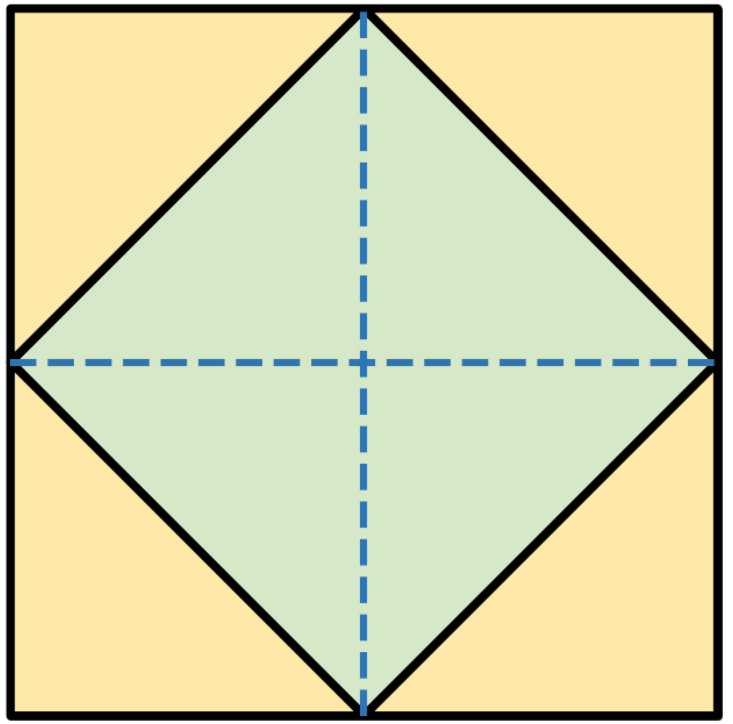
ABANS DE COMENÇAR

Dibuixa les dues rectes que uneixen punts mitjans de costats oposats. Què observes?

Pas 1. Cada quadrat és la meitat

PROBLEMA 4

Tracem els segments que uneixen punts mitjans oposats (en blau). El quadrat gran queda partit en **4 quadradets iguals**.



- Cada quadradet queda tallat per la seua diagonal.
- Una meitat (**verd**) està dins del quadrat interior i l'altra (**groc**) fora.

CONCLUSIÓ

$$\text{Àrea del quadrat interior} = \frac{1}{2} \cdot \text{àrea de l'anterior}$$

Pas 2. L'àrea del quart quadrat

PROBLEMA 4

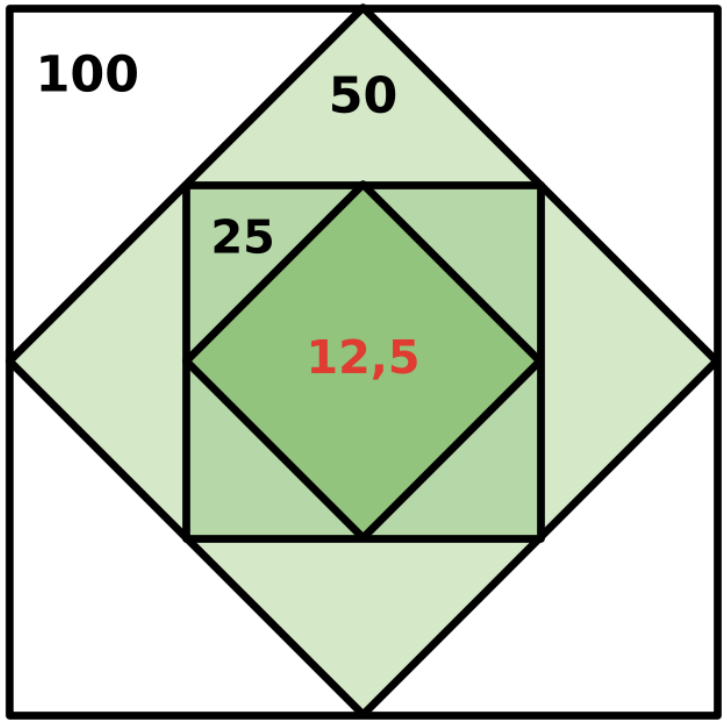
Cada vegada dividim l'àrea entre 2:

$A_1 = 10 \cdot 10 = 100\ \text{cm}^2$

$A_2 = 100 : 2 = 50\ \text{cm}^2$

$A_3 = 50 : 2 = 25\ \text{cm}^2$

$A_4 = 25 : 2 = 12{,}5\ \text{cm}^2$



SOLUCIÓ a)

$\boxed{A_4 = 12{,}5\ \text{cm}^2}$

IDEA

Dividir 3 vegades entre 2 és dividir entre 8: A_4 = 100 : 8

Pas 3. La suma de les quatre àrees

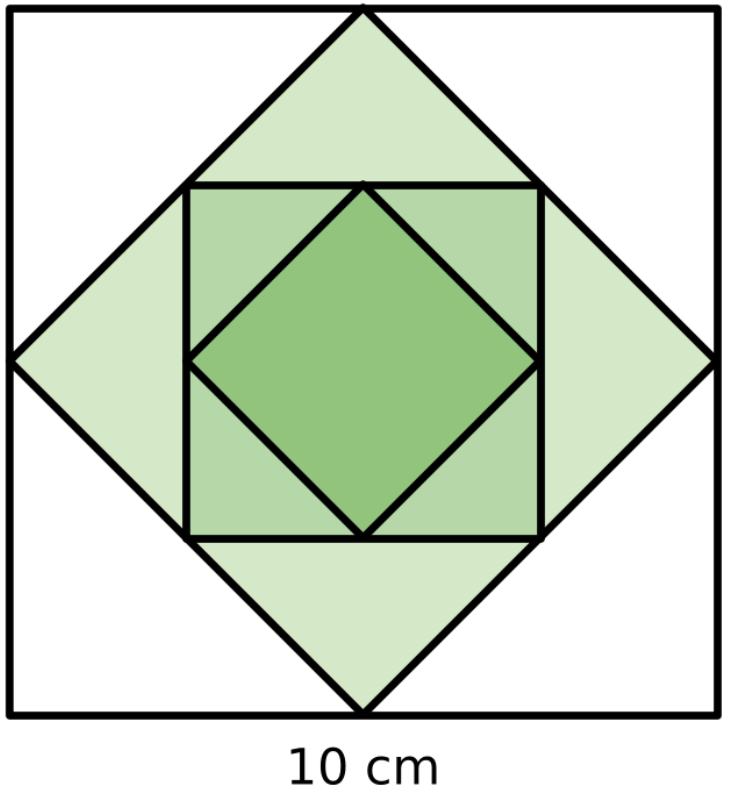
PROBLEMA 4

Sumem les àrees que hem calculat:

$$100 + 50 + 25 + 12{,}5 = 187{,}5 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓ b)

$\boxed{187{,}5 \text{ cm}^2}$



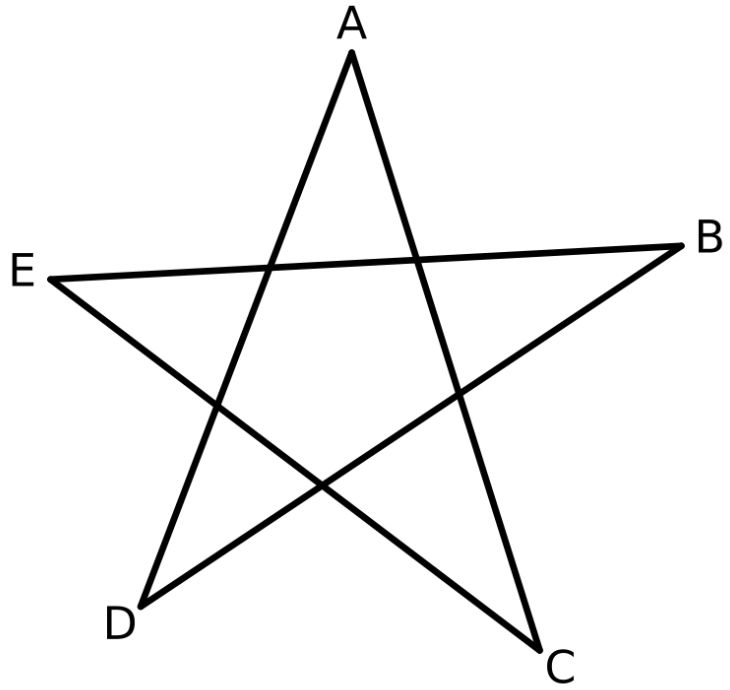
PER A PENSAR

Si continuàrem dibuixant quadrats sense parar, la suma s'acostaria a **200 cm²**, però mai no hi arribaria.

Problema 5. L'estrela de cinc puntes

Dibuixem cinc punts A, B, C, D, E com a vèrtexs d'un pentàgon qualsevol, no necessàriament regular, i tracem les cinc diagonals AC, CE, EB, BD i DA, que formen una estrela.

Demostra que la suma dels cinc angles de les puntes de l'estrela és sempre 180°.



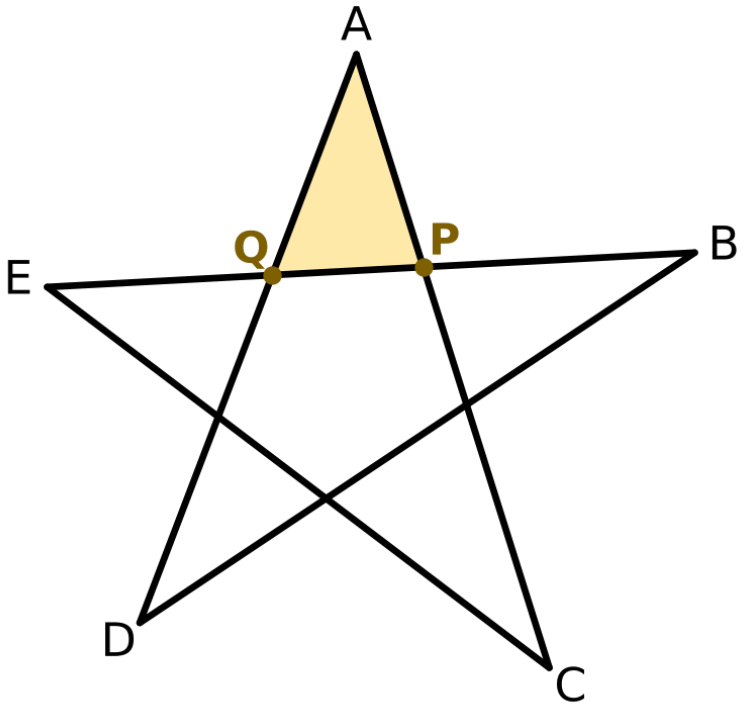
ABANS DE COMENÇAR

Prova primer amb una estrela regular: quant mesura cada punta?

Pas 1. Els punts P i Q

PROBLEMA 5

Anomenem també **A, B, C, D, E** els angles de les puntes. La diagonal BE talla AC en **P** i AD en **Q**.



PROPIETAT DE L'ANGLE EXTERIOR

Un angle exterior d'un triangle és igual a **la suma dels dos angles interiors no adjacents**.

IDEA

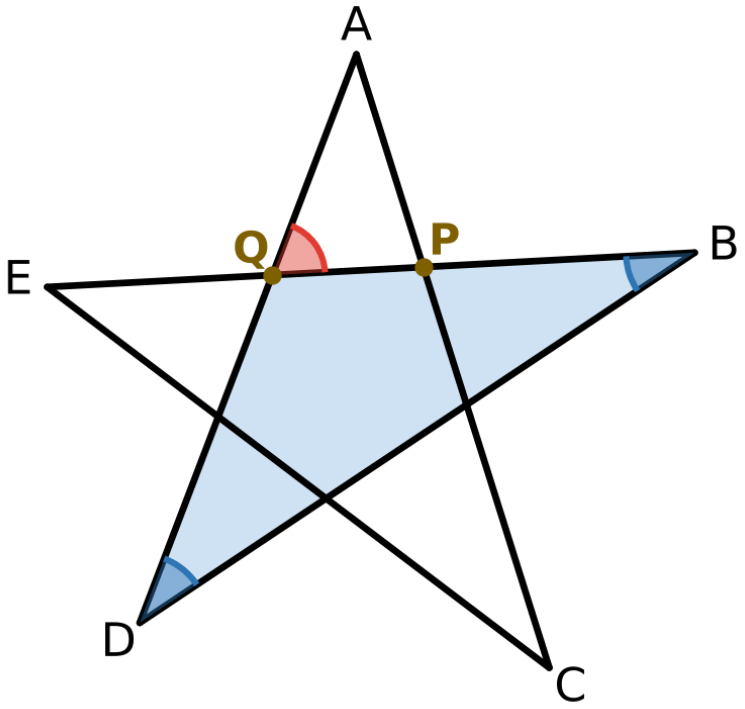
Usarem aquesta propietat dues vegades i, al final, la suma dels angles del triangle **APQ**.

Pas 2. El triangle BQD

PROBLEMA 5

Els seus angles en **B** i en **D** són justament les puntes B i D de l'estrela. L'angle **AQP** és el seu angle exterior en Q.

$$\angle AQP = B + D$$



ATENCIÓ

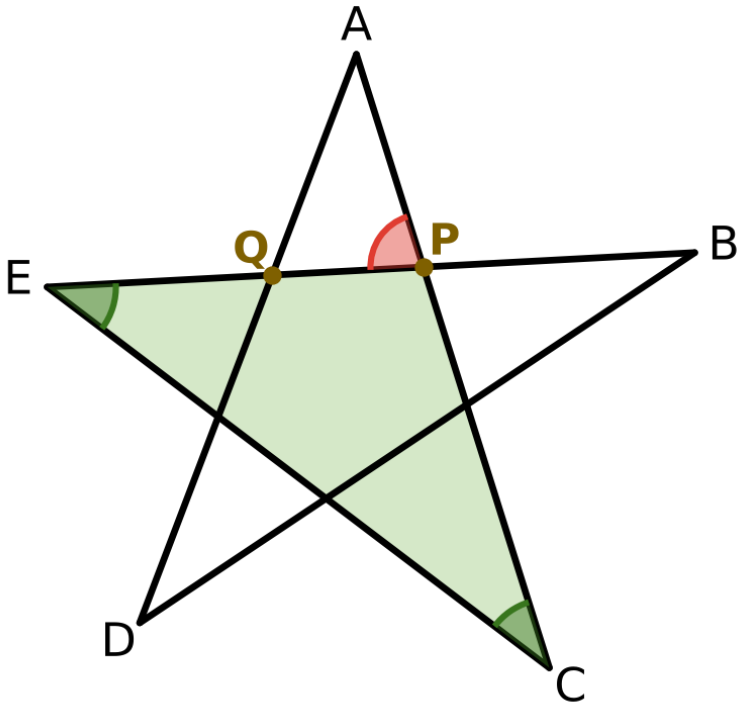
L'angle exterior (roig) és igual a la suma dels dos angles interiors no adjacents (blaus).

Pas 3. El triangle EPC

PROBLEMA 5

De la mateixa manera, els seus angles en **E** i en **C** són les puntes E i C. L'angle **APQ** és el seu angle exterior en P.

$$\angle APQ = E + C$$



IDEA

És el mateix raonament que en el pas 2, ara amb el triangle EPC.

Pas 4. El triangle APQ

PROBLEMA 5

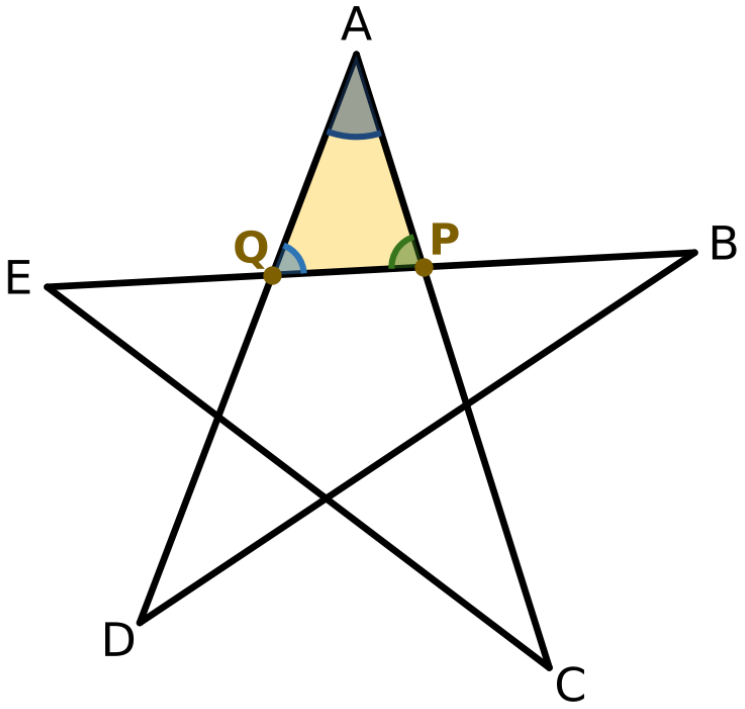
En el triangle **APQ** els tres angles sumen 180°:

$$A + \angle APQ + \angle AQP = 180°$$

$$A + (E + C) + (B + D) = 180°$$

SOLUCIÓ

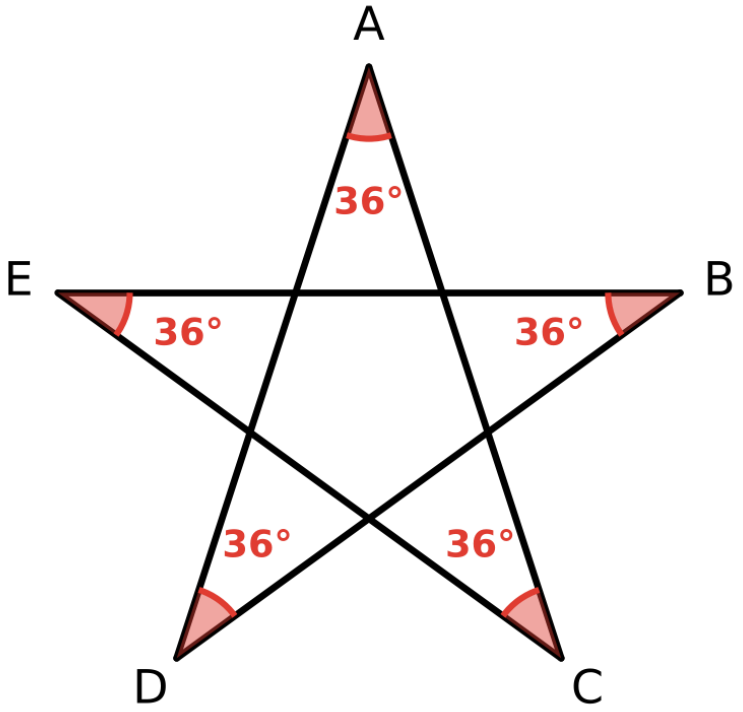
$$\boxed{A + B + C + D + E = 180°}$$



Comprovació: l'estrela regular

PROBLEMA 5

En el pentàgon regular, cada angle mesura 108° i les diagonals el divideixen en tres parts iguals de **36°**.



COMPROVACIÓ

$$108° : 3 = 36°$$

$$5 \cdot 36° = 180° \checkmark$$

ATENCIÓ

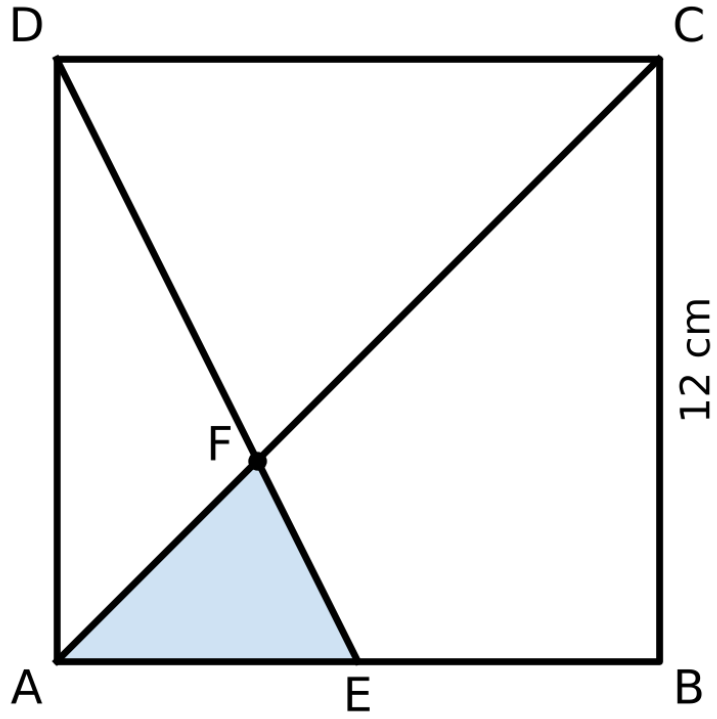
Un exemple no és una demostració: la prova general és la dels passos 1 a 4.

Problema 6. Diagonal i segment en un quadrat

En el quadrat ABCD de 12 cm de costat, E és el punt mitjà del costat AB. El segment DE talla la diagonal AC en el punt F.

a) Quina és l'àrea del triangle AEF (ombrejat)?

b) Quina és l'àrea del quadrilàter EBCF?



ABANS DE COMENÇAR

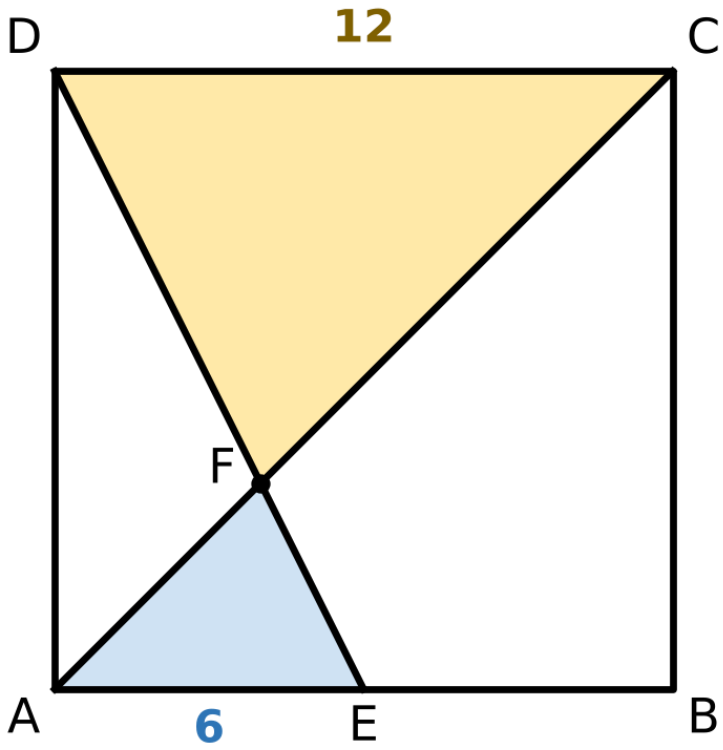
Busca dos triangles amb la mateixa forma (semblants).

Pas 1. Dos triangles semblants

PROBLEMA 6

AB i CD són paral·lels, així que els triangles **AEF** i **CDF** tenen els mateixos angles: els angles en F són oposats pel vèrtex i els altres són alterns interns.

$$\text{Raó de semblança} = \frac{AE}{CD} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



CONCLUSIÓ

Tots els costats del triangle AEF fan **la meitat** dels del triangle CDF. En particular, EF = ½ FD.

Pas 2. L'altura de F i l'àrea de AEF

PROBLEMA 6

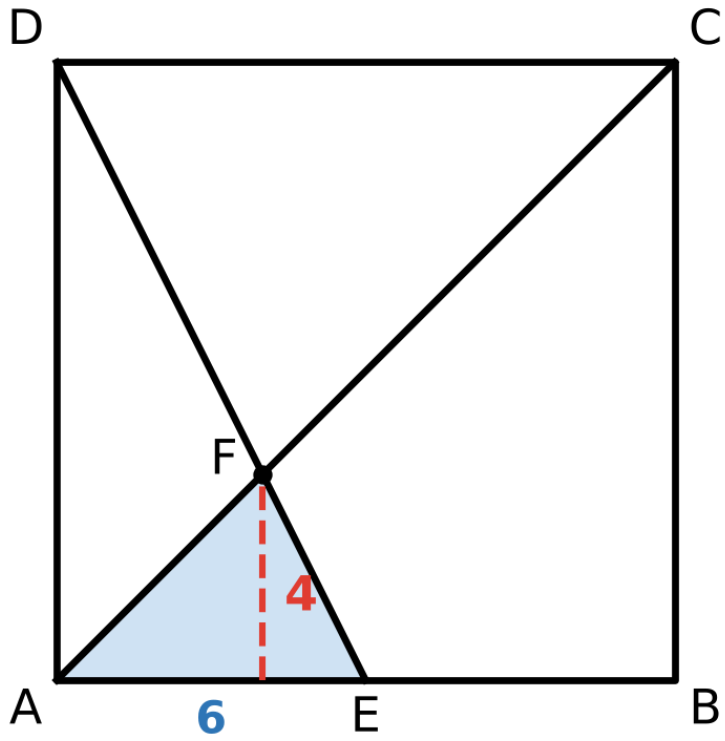
Com que EF = ½ FD, el punt F està a **1/3 del camí** de E a D. D està a 12 cm de AB, i E està sobre AB:

$$\text{altura de F} = \frac{12}{3} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Àrea } (AEF) = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓ a)

$$\boxed{12 \text{ cm}^2}$$



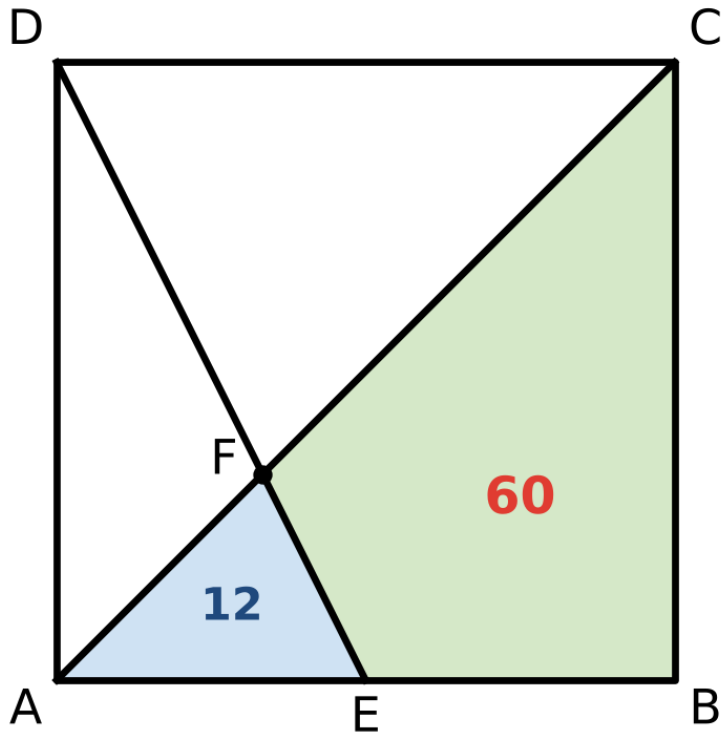
Pas 3. El quadrilàter EBCF

PROBLEMA 6

El triangle **ABC** (mig quadrat) està format pel triangle AEF i el quadrilàter EBCF:

$$\text{Àrea}\,(ABC) = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72\ \text{cm}^2$$

$$EBCF = 72 - 12 = 60\ \text{cm}^2$$



SOLUCIÓ b)

$$\boxed{60\ \text{cm}^2}$$

Una altra manera: amb coordenades

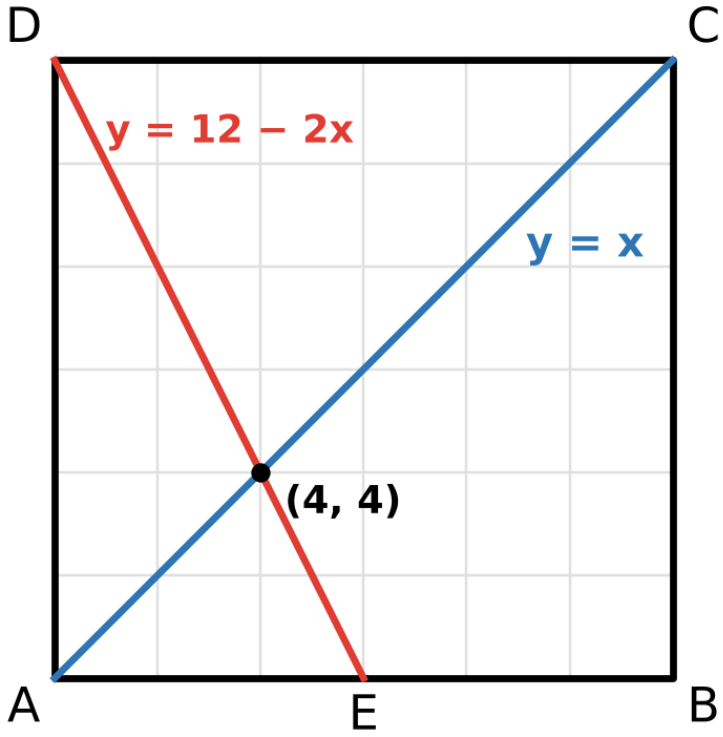
PROBLEMA 6

Posem l'origen en A: A = (0, 0), B = (12, 0), D = (0, 12) i E = (6, 0).

Diagonal AC: $y = x$

Recta DE: $y = 12 - 2x$

Tall: $x = 12 - 2x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$



PUNT F

$$\boxed{F = (4, 4)}$$

COMPROVACIÓ

L'altura de F és 4 cm, com abans.

Les solucions

1. Rectangle trossejat

a) $18\ \text{cm}^2$

b) $45\ \text{cm}^2$

2. Triangle isòsceles

$\angle ABD = 30°$

3. Cub pintat

3×3×3: 8, 12, 6, 1

4×4×4: 8, 24, 24, 8

4. Quadrats encaixats

a) $12{,}5\ \text{cm}^2$

b) $187{,}5\ \text{cm}^2$

5. Estrela de cinc puntes

$A + B + C + D + E = 180°$

6. Diagonal en un quadrat

a) $12\ \text{cm}^2$

b) $60\ \text{cm}^2$

PROBLEMAS DE NIVEL A (1.º y 2.º de ESO)

Problemas de geometría

Soluciones **paso a paso**, con un desarrollo por diapositiva

Soluciones en castellano

LOS SEIS PROBLEMAS

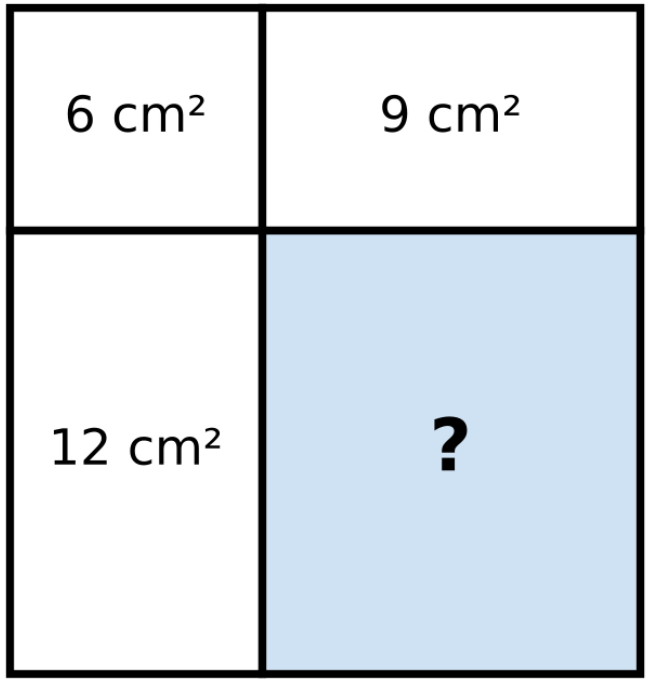
1. El rectángulo troceado
2. El triángulo isósceles
3. El cubo pintado
4. Cuadrados encajados
5. La estrella de cinco puntas
6. Diagonal y segmento en un cuadrado

Problema 1. El rectángulo troceado

Un rectángulo se divide en cuatro rectángulos más pequeños mediante una recta paralela a la base y otra paralela a la altura, como en la figura. El rectángulo de arriba a la izquierda tiene un área de 6 cm², el de arriba a la derecha 9 cm² y el de abajo a la izquierda 12 cm².

a) ¿Cuál es el área del rectángulo de abajo a la derecha?

b) ¿Cuál es el área del rectángulo grande?



ANTES DE EMPEZAR

¿Hace falta conocer las medidas de los lados? Fíjate en dos rectángulos que tengan **la misma altura**.

Paso 1. La fila de arriba

PROBLEMA 1

Llamamos **a** y **b** a las anchuras de las columnas, y **h** y **k** a las alturas de las filas.

LOS DATOS:

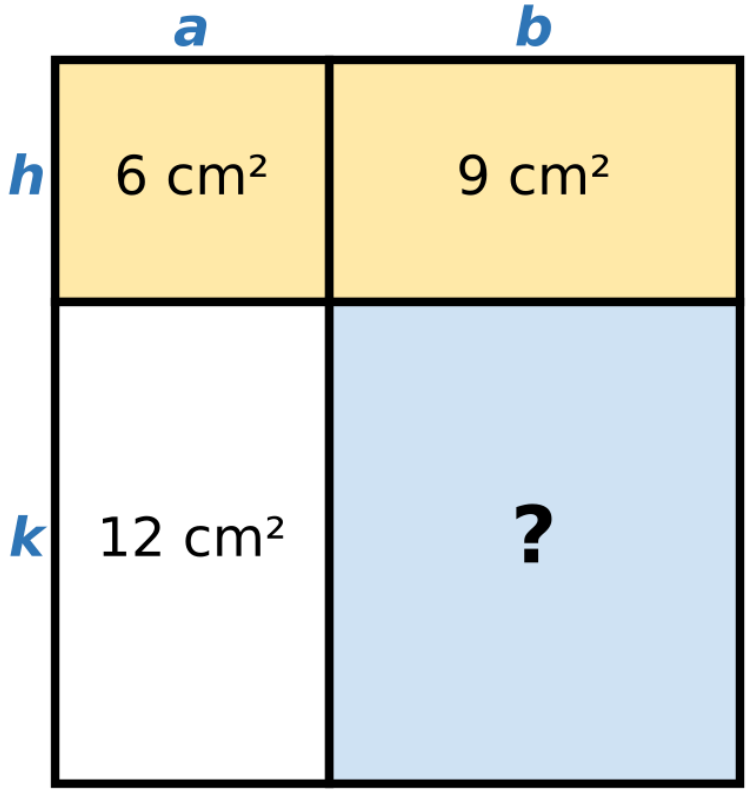
$$a \cdot h = 6$$

$$b \cdot h = 9$$

$$a \cdot k = 12$$

IDEA

Los dos rectángulos de arriba tienen **la misma altura h**: sus áreas son proporcionales a las anchuras.



$$\frac{b}{a} = \frac{b \cdot h}{a \cdot h} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

La columna derecha es **1,5 veces** más ancha que la izquierda.

Paso 2. La fila de abajo

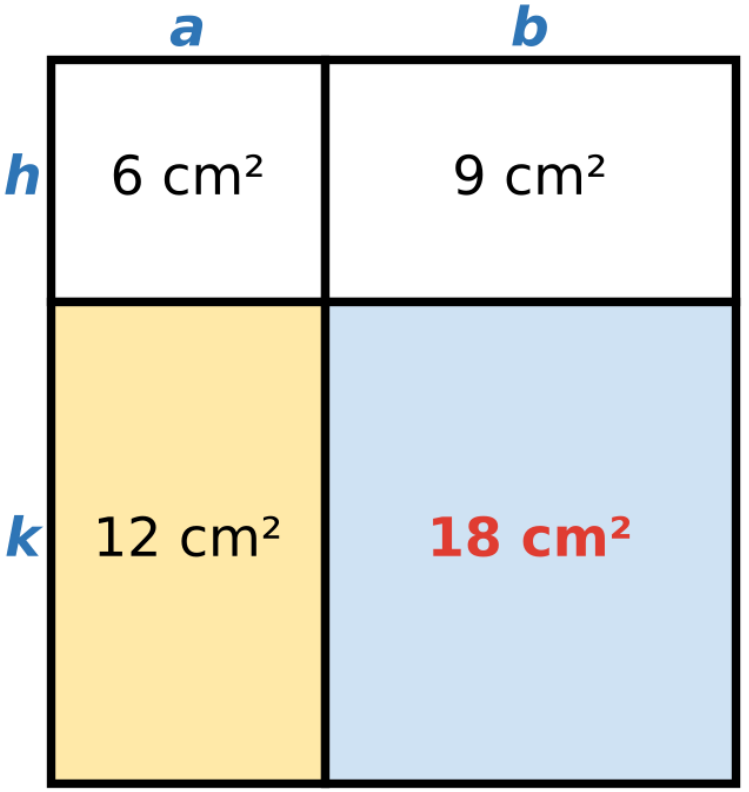
PROBLEMA 1

Los dos rectángulos de abajo también tienen **la misma altura** **k**: el de la derecha tiene 3/2 del área del de la izquierda.

$$x = 12 \cdot \frac{3}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓN a)

$\boxed{18 \text{ cm}^2}$



ATENCIÓN

No hace falta conocer **a**, **b**, **h** ni **k**: basta con las proporciones.

Otra forma: productos en diagonal

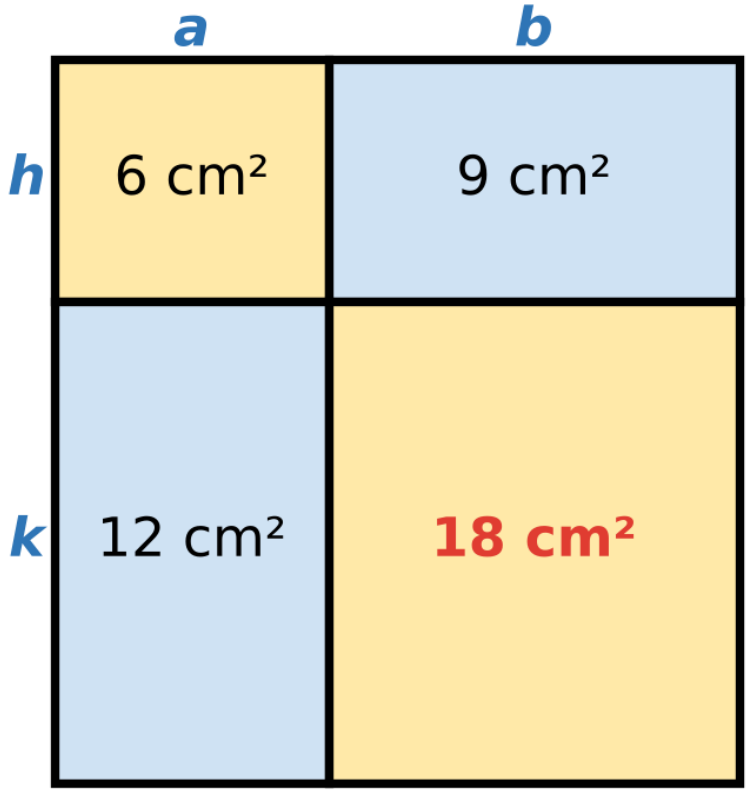
PROBLEMA 1

Multiplicamos las áreas que están en diagonal:

$$(a \cdot h) \cdot (b \cdot k) = a \cdot b \cdot h \cdot k$$

$$(b \cdot h) \cdot (a \cdot k) = a \cdot b \cdot h \cdot k$$

$$6 \cdot x = 9 \cdot 12 \;\Rightarrow\; x = \frac{108}{6} = 18 \text{ cm}^2$$



IDEA

Cuando un rectángulo se corta así, **los productos de las áreas en diagonal son iguales**: 6 · 18 = 9 · 12.

Paso 3. El área total

PROBLEMA 1

Sumamos las cuatro áreas:

$$6 + 9 + 12 + 18 = 45 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓN b)

$\boxed{45 \text{ cm}^2}$

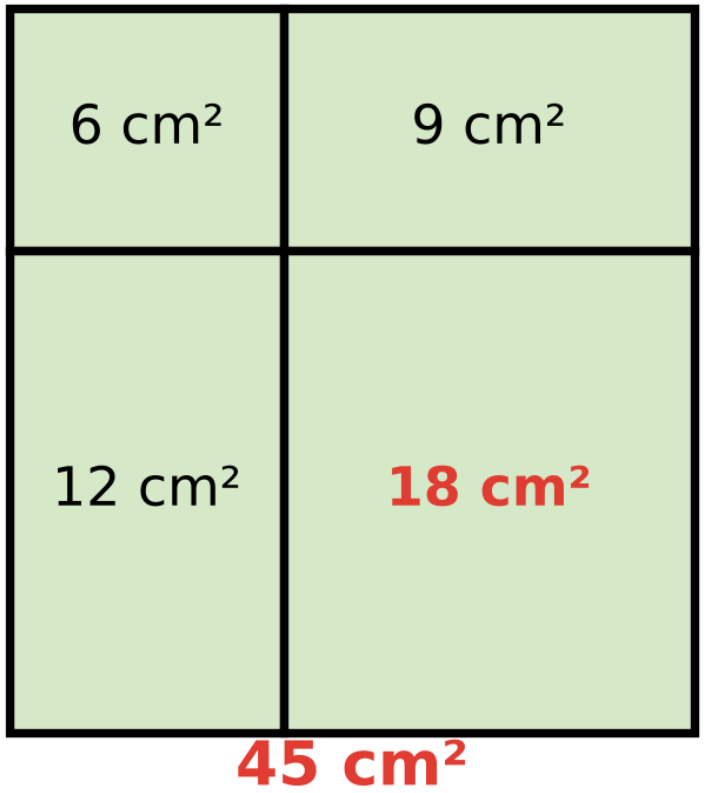
COMPROBACIÓN

Unas medidas posibles:

a = 2, b = 3, h = 3, k = 6

Rectángulo grande:

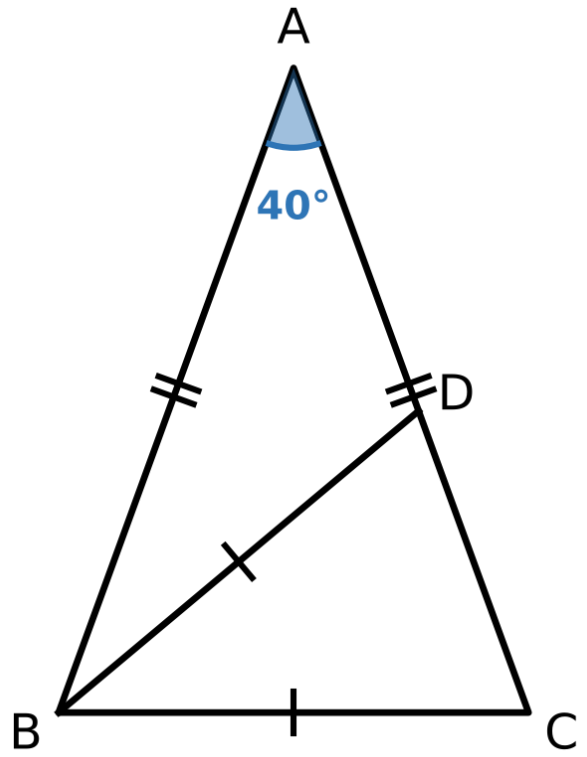
5 · 9 = 45 ✓



Problema 2. El triángulo isósceles

En el triángulo ABC se cumple AB = AC y el ángulo en A mide 40°. Sobre el lado AC se toma un punto D de modo que BD = BC.

¿Cuánto mide el ángulo ABD?



ANTES DE EMPEZAR

Marca en el dibujo los lados iguales. ¿Cuántos triángulos isósceles ves?

Paso 1. Los ángulos del triángulo ABC

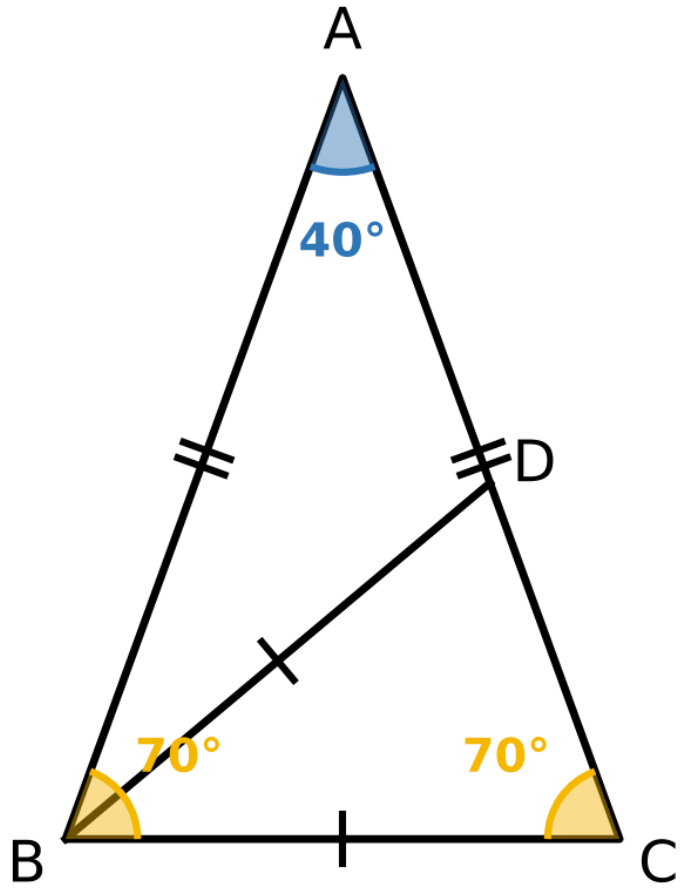
PROBLEMA 2

Como **AB = AC**, el triángulo ABC es isósceles y **los ángulos de la base son iguales**.

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B + \angle C = 180° - 40° = 140°$$

$$\angle B = \angle C = \frac{140°}{2} = 70°$$



ATENCIÓN

Los tres ángulos de un triángulo suman siempre **180°**.

Paso 2. El triángulo BCD

PROBLEMA 2

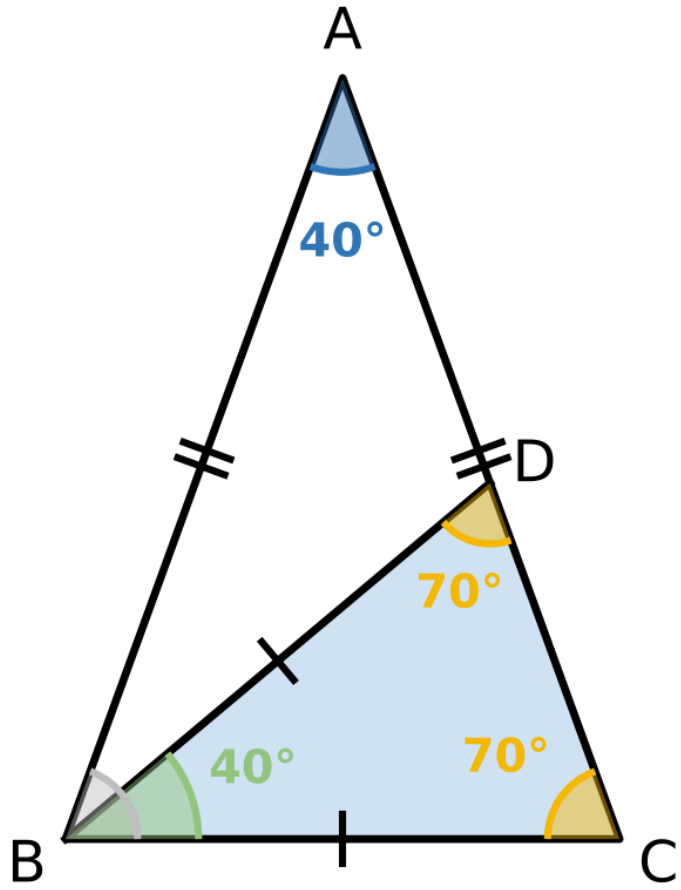
Como **BD = BC**, el triángulo BCD también es isósceles. Los ángulos iguales son los **opuestos** a esos lados: los ángulos en D y en C.

$$\angle BDC = \angle BCD = 70°$$

$$\angle DBC = 180° - 70° - 70° = 40°$$

ATENCIÓN

El lado BD es opuesto al ángulo en C y el lado BC es opuesto al ángulo en D.
¡El ángulo desigual es el de B!



Paso 3. El ángulo ABD

PROBLEMA 2

El ángulo en B del triángulo grande (70°) queda dividido en dos partes por BD:

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 70° - 40° = 30°$$

SOLUCIÓN

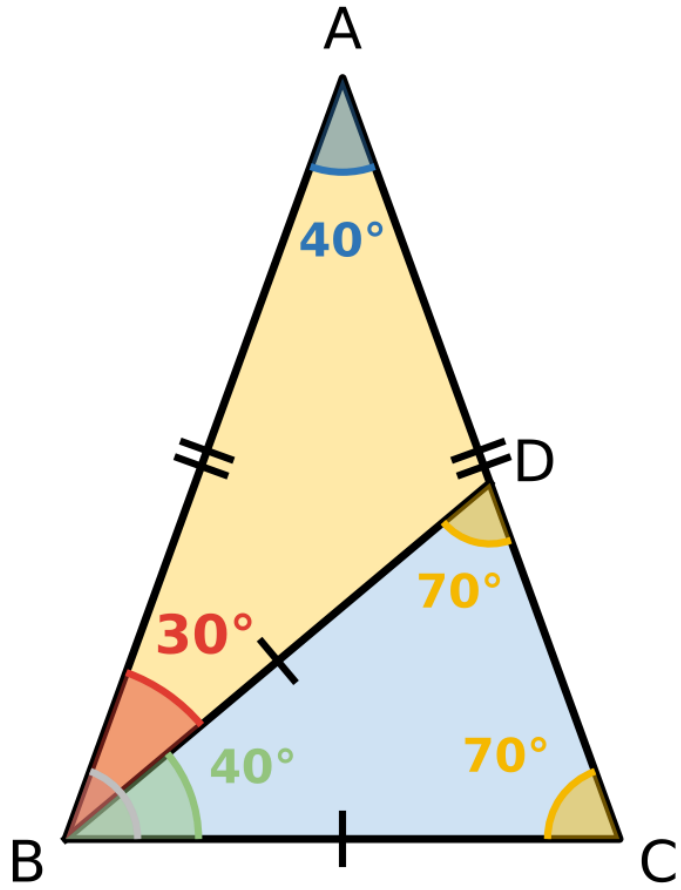
$$\boxed{\angle ABD = 30°}$$

COMPROBACIÓN

En el triángulo ABD:

∠ADB = 180° − 70° = 110°

40° + 30° + 110° = 180° ✓

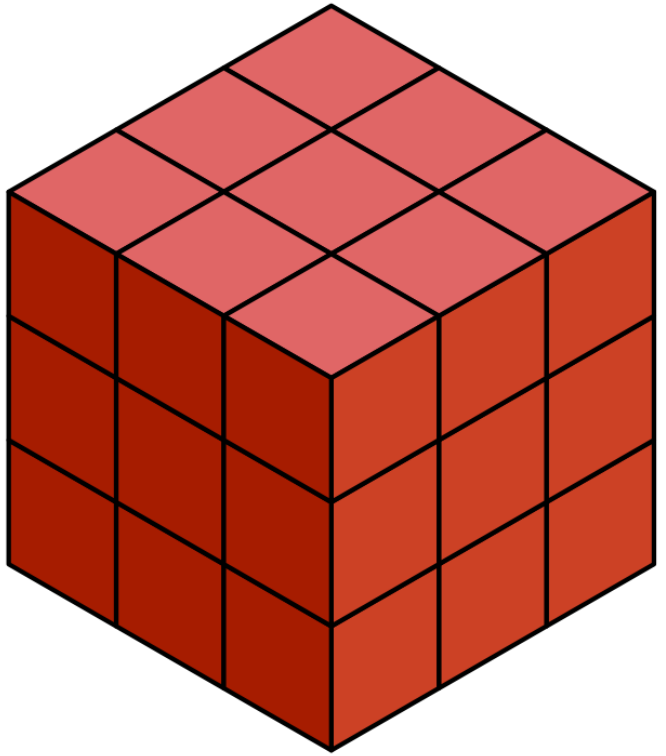


Problema 3. El cubo pintado

Se construye un cubo grande pegando 27 cubitos iguales (3 × 3 × 3). Después se pinta de rojo toda la superficie exterior del cubo grande y se vuelve a separar en cubitos.

a) ¿Cuántos cubitos tienen exactamente 3 caras pintadas? ¿Y 2? ¿Y 1? ¿Y ninguna?

b) Repite el apartado anterior para un cubo de 4 × 4 × 4.



ANTES DE EMPEZAR

¿Dónde está un cubito con 3 caras pintadas? ¿Y uno que no tenga ninguna?

Paso 1. Esquinas y aristas

PROBLEMA 3

Contamos según **dónde está** cada cubito dentro del cubo grande (n=3):

8

3 caras

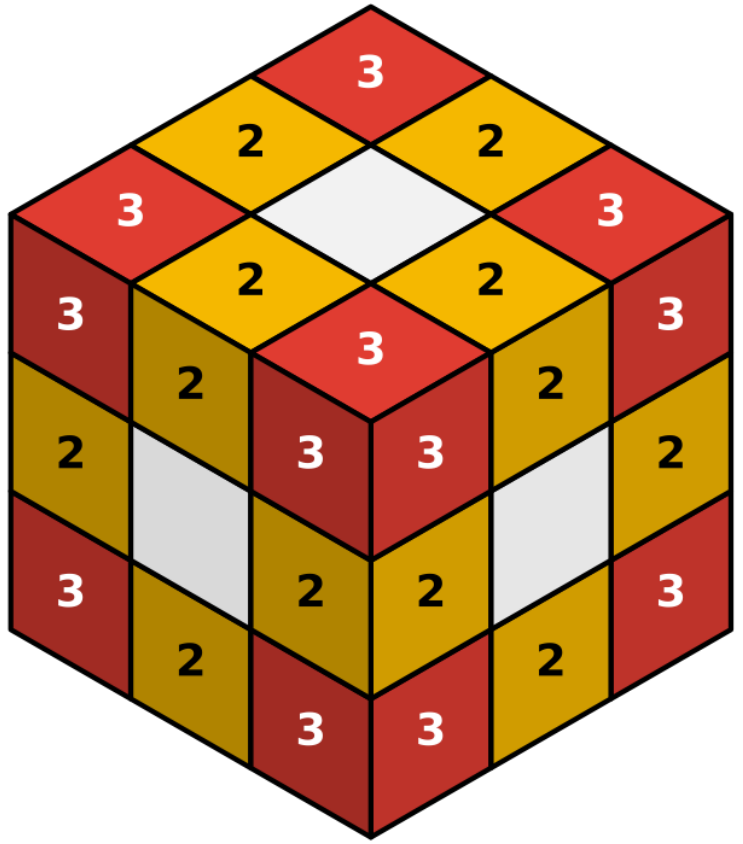
Las esquinas: el cubo tiene 8 vértices.

12

2 caras

Las aristas sin las esquinas.

$$12 \text{ aristas} \times 1 \text{ cubito} = 12$$



Paso 2. Caras y centro

PROBLEMA 3

6

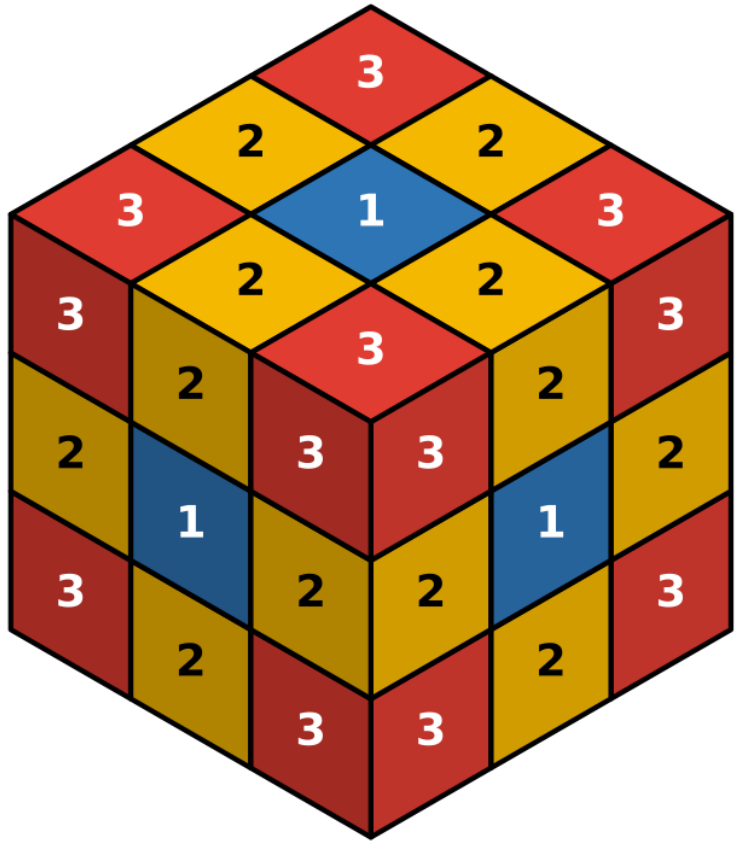
1 cara

El centro de cada cara: 6 caras.

1

Ninguna

Solo el cubito central.



COMPROBACIÓN

$$8 + 12 + 6 + 1 = 27 \checkmark$$

SOLUCIÓN a)

3 caras: 8	2: 12	1: 6	ninguna: 1

Paso 3. El cubo 4 × 4 × 4

PROBLEMA 3

Ahora hay $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ cubitos. En cada arista quedan **2** cubitos que no son esquinas.

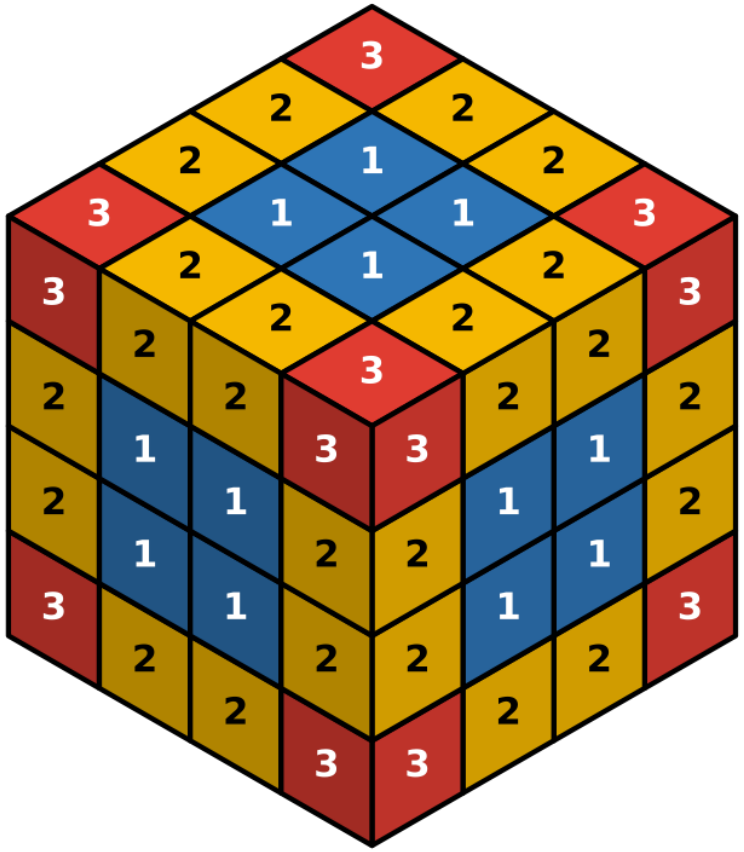
3 caras: esquinas	8
2 caras: aristas	$12 \cdot 2 = 24$
1 cara: caras	$6 \cdot 4 = 24$
Ninguna: cubo interior	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

COMPROBACIÓN

$$8 + 24 + 24 + 8 = 64 \checkmark$$

SOLUCIÓN b)

$$\boxed{8,\ 24,\ 24,\ 8}$$

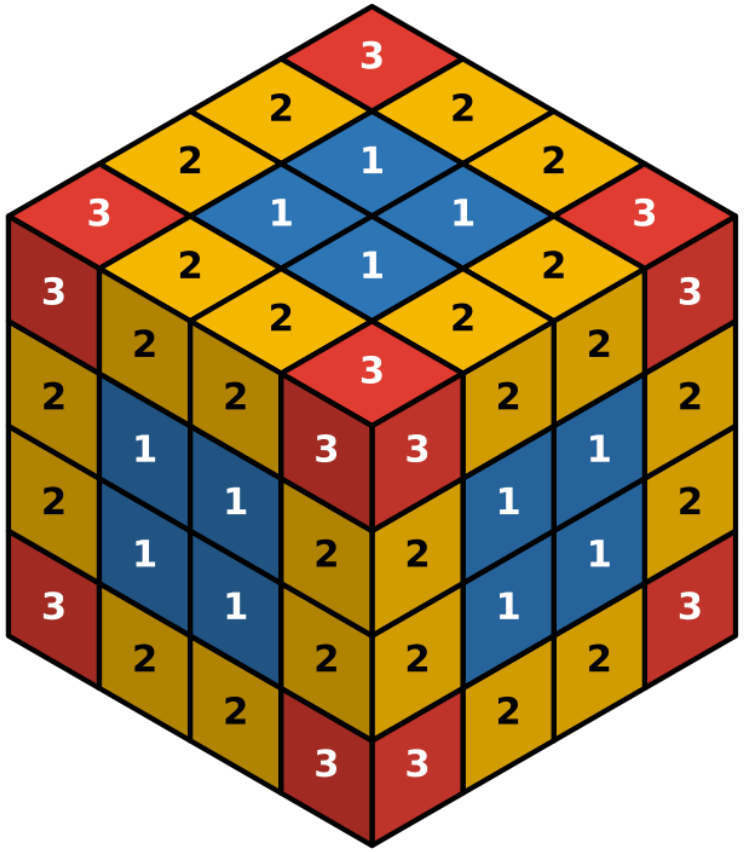


Para pensar: un cubo n × n × n

PROBLEMA 3

En cada arista hay n − 2 cubitos que no son esquinas, y en cada cara un cuadrado de (n − 2) × (n − 2).

3 caras	8
2 caras	$12\,(n-2)$
1 cara	$6\,(n-2)^2$
Ninguna	$(n-2)^3$



PARA PENSAR

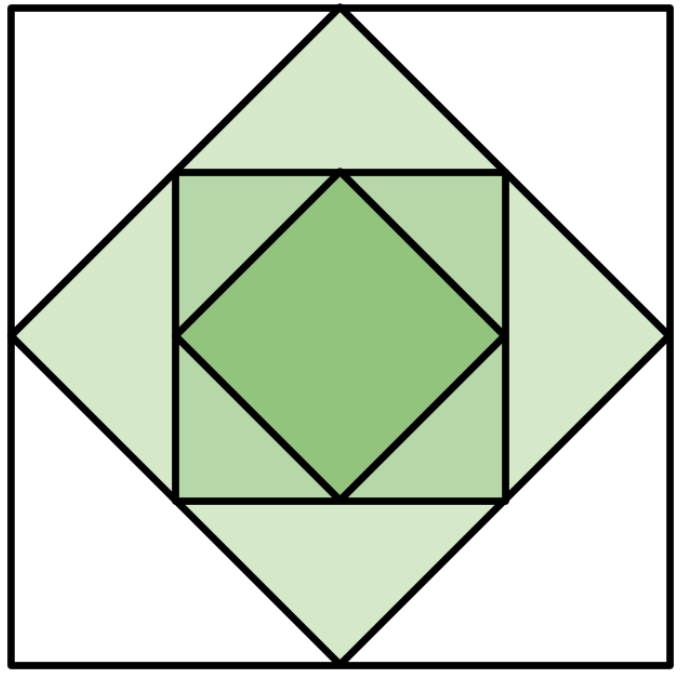
Para n = 3 y n = 4 recuperamos los resultados anteriores. ¡Prueba con n = 5!

Problema 4. Cuadrados encajados

Tenemos un cuadrado de 10 cm de lado. Uniendo los puntos medios de sus lados obtenemos un segundo cuadrado. Uniendo los puntos medios de los lados del segundo obtenemos un tercero, y de la misma forma un cuarto.

a) ¿Cuál es el área del cuarto cuadrado?

b) ¿Cuánto suman las áreas de los cuatro cuadrados?



ANTES DE EMPEZAR

Dibuja las dos rectas que unen puntos medios de lados opuestos. ¿Qué observas?

Paso 1. Cada cuadrado es la mitad

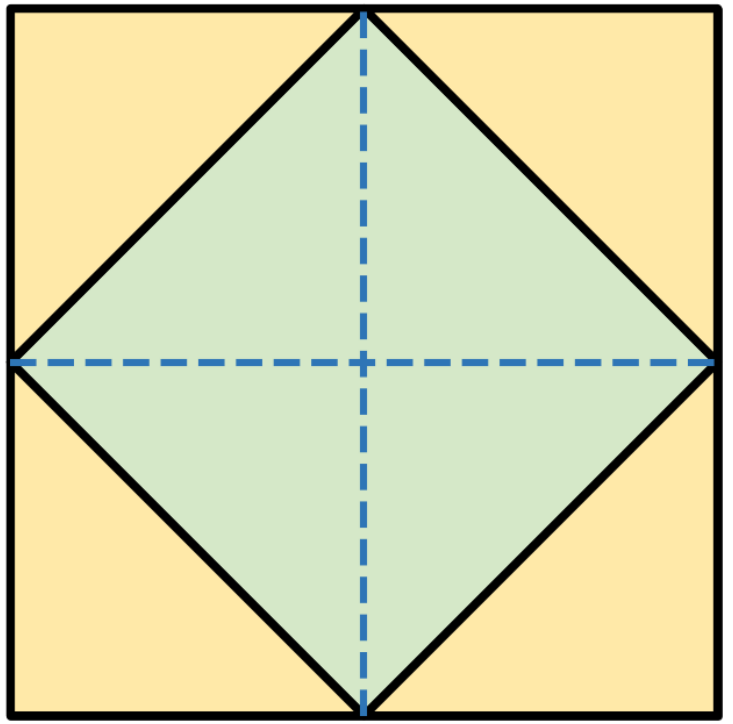
PROBLEMA 4

Trazamos los segmentos que unen puntos medios opuestos (en azul). El cuadrado grande queda partido en **4 cuadraditos iguales**.

- Cada cuadradito queda cortado por su diagonal.
- Una mitad (**verde**) está dentro del cuadrado interior y la otra (**amarillo**) fuera.

CONCLUSIÓN

$$\text{Área del cuadrado interior} = \frac{1}{2} \cdot \text{área del anterior}$$



10 cm

Paso 2. El área del cuarto cuadrado

PROBLEMA 4

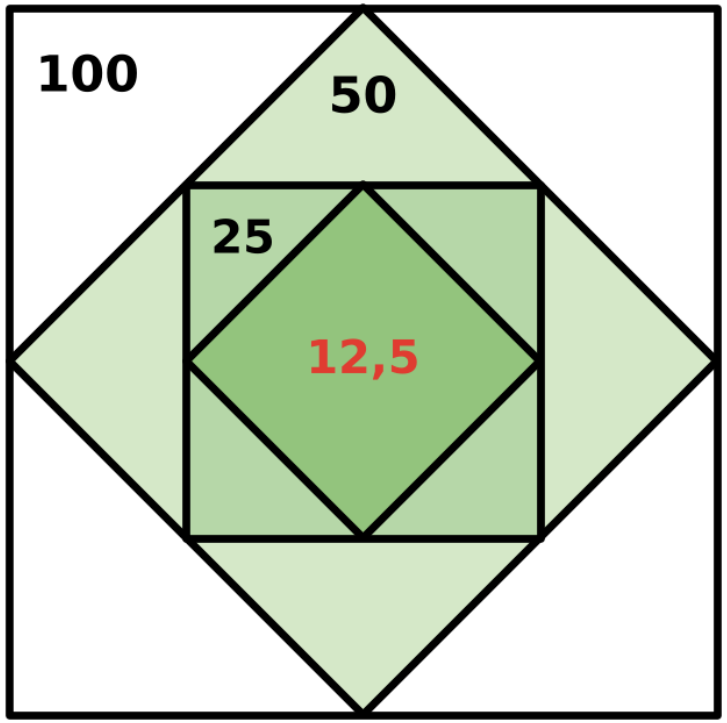
Cada vez dividimos el área entre 2:

$$A_1 = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 100 : 2 = 50 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 50 : 2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$A_4 = 25 : 2 = 12{,}5 \text{ cm}^2$$



SOLUCIÓN a)

$$\boxed{A_4 = 12{,}5 \text{ cm}^2}$$

IDEA

Dividir 3 veces entre 2 es dividir entre 8: $A_4 = 100 : 8$

Paso 3. La suma de las cuatro áreas

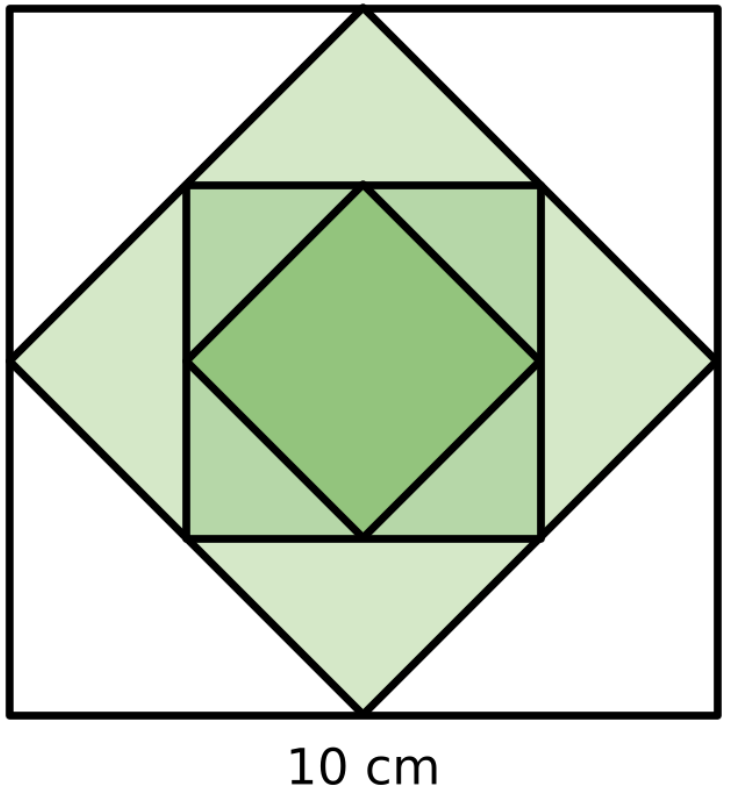
PROBLEMA 4

Sumamos las áreas que hemos calculado:

$$100 + 50 + 25 + 12{,}5 = 187{,}5 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓN b)

$$\boxed{187{,}5 \text{ cm}^2}$$



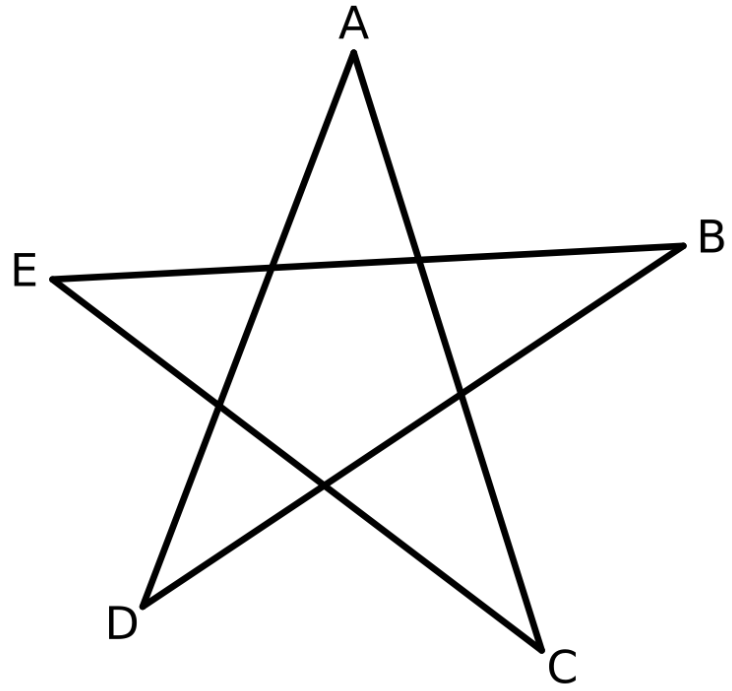
PARA PENSAR

Si siguiéramos dibujando cuadrados sin parar, la suma se acercaría a **200 cm²**, pero nunca llegaría.

Problema 5. La estrella de cinco puntas

Dibujamos cinco puntos A, B, C, D, E como vértices de un pentágono cualquiera, no necesariamente regular, y trazamos las cinco diagonales AC, CE, EB, BD y DA, que forman una estrella.

Demuestra que la suma de los cinco ángulos de las puntas de la estrella es siempre 180°.



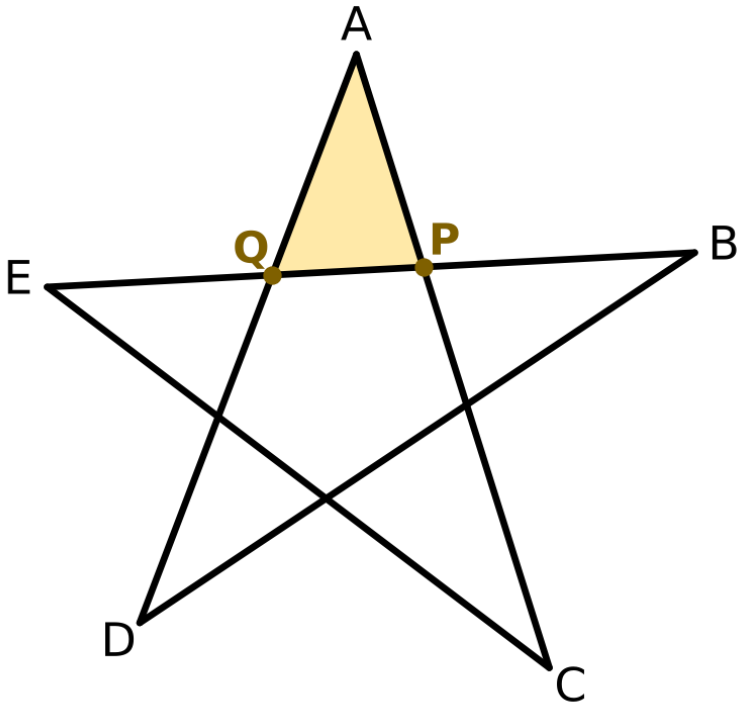
ANTES DE EMPEZAR

Prueba primero con una estrella regular: ¿cuánto mide cada punta?

Paso 1. Los puntos P y Q

PROBLEMA 5

Llamamos también **A, B, C, D, E** a los ángulos de las puntas. La diagonal BE corta a AC en **P** y a AD en **Q**.



PROPIEDAD DEL ÁNGULO EXTERIOR

Un ángulo exterior de un triángulo es igual a **la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes**.

IDEA

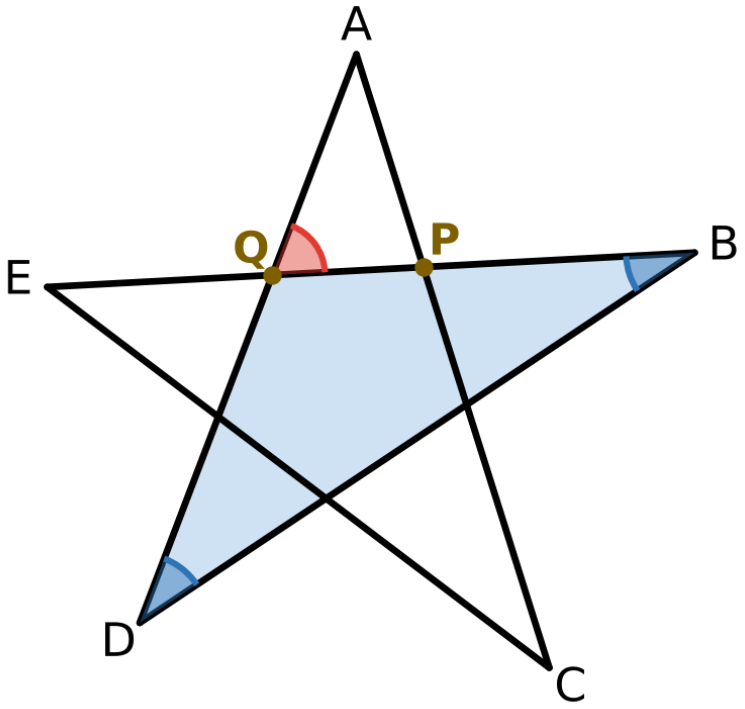
Usaremos esta propiedad dos veces y, al final, la suma de los ángulos del triángulo **APQ**.

Paso 2. El triángulo BQD

PROBLEMA 5

Sus ángulos en **B** y en **D** son precisamente las puntas B y D de la estrella. El ángulo **AQP** es su ángulo exterior en Q.

$$\angle AQP = B + D$$



ATENCIÓN

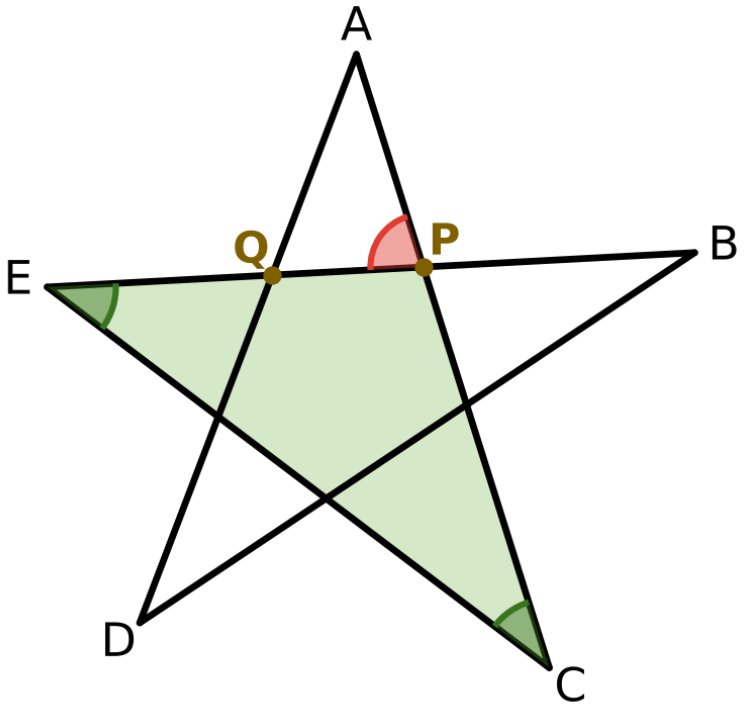
El ángulo exterior (rojo) es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes (azules).

Paso 3. El triángulo EPC

PROBLEMA 5

Del mismo modo, sus ángulos en **E** y en **C** son las puntas E y C.
El ángulo **APQ** es su ángulo exterior en P.

$$\angle APQ = E + C$$



IDEA

Es el mismo razonamiento que en el paso 2, ahora con el triángulo EPC.

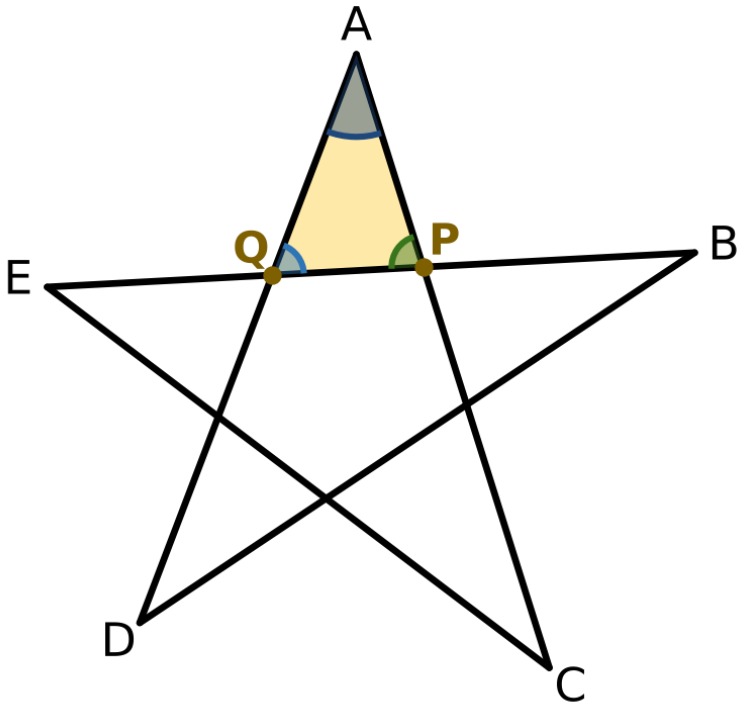
Paso 4. El triángulo APQ

PROBLEMA 5

En el triángulo **APQ** los tres ángulos suman 180°:

$$A + \angle APQ + \angle AQP = 180°$$

$$A + (E + C) + (B + D) = 180°$$



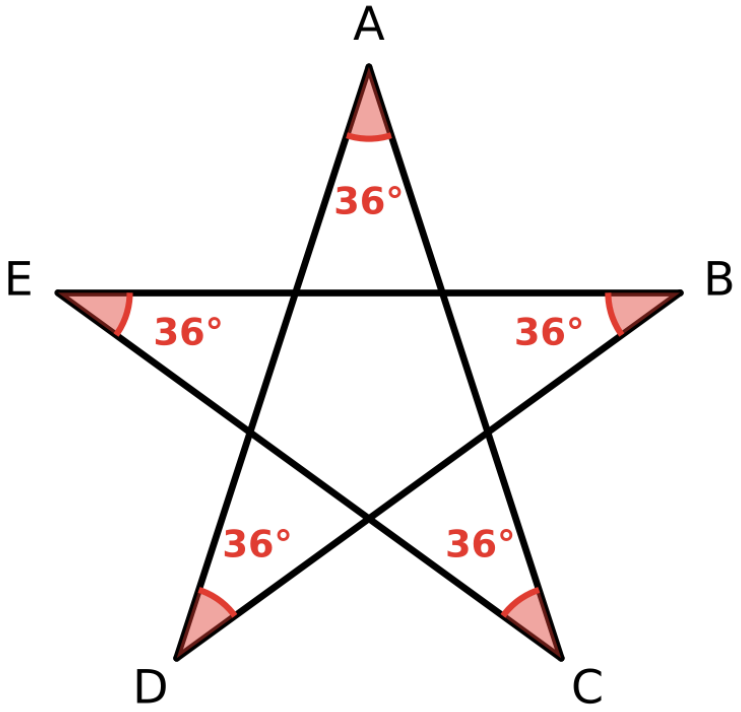
SOLUCIÓN

$$\boxed{A + B + C + D + E = 180°}$$

Comprobación: la estrella regular

PROBLEMA 5

En el pentágono regular, cada ángulo mide 108° y las diagonales lo dividen en tres partes iguales de **36°**.



COMPROBACIÓN

$$108° : 3 = 36°$$

$$5 \cdot 36° = 180° \checkmark$$

ATENCIÓN

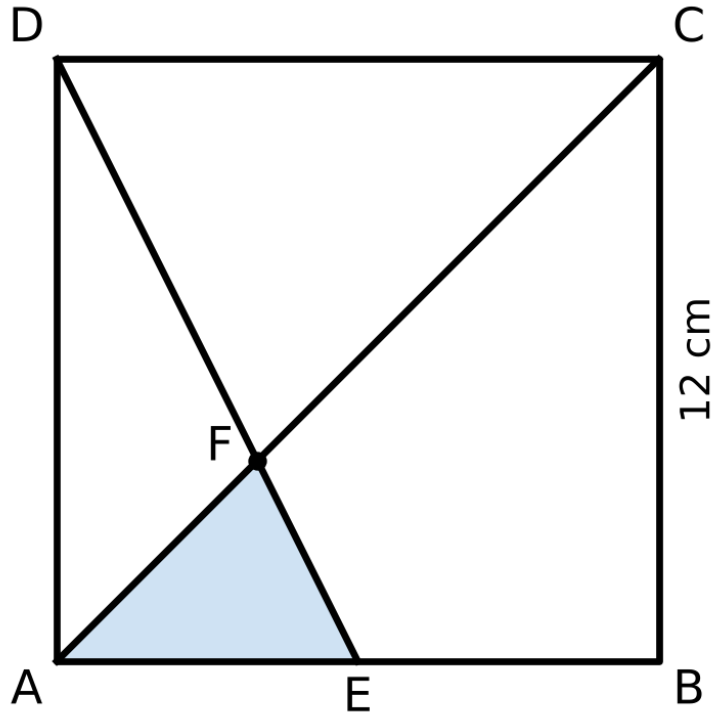
Un ejemplo no es una demostración: la prueba general es la de los pasos 1 a 4.

Problema 6. Diagonal y segmento en un cuadrado

En el cuadrado ABCD de 12 cm de lado, E es el punto medio del lado AB. El segmento DE corta a la diagonal AC en el punto F.

a) ¿Cuál es el área del triángulo AEF (sombreado)?

b) ¿Cuál es el área del cuadrilátero EBCF?



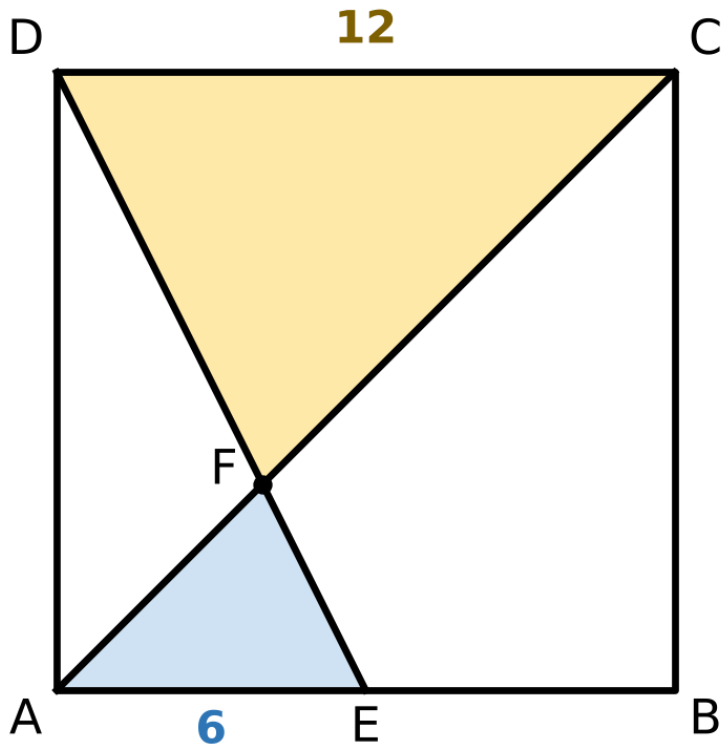
ANTES DE EMPEZAR

Busca dos triángulos con la misma forma (semejantes).

Paso 1. Dos triángulos semejantes

PROBLEMA 6

AB y CD son paralelos, así que los triángulos **AEF** y **CDF** tienen los mismos ángulos: los ángulos en F son opuestos por el vértice y los otros son alternos internos.



$$\text{Razón de semejanza} = \frac{AE}{CD} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

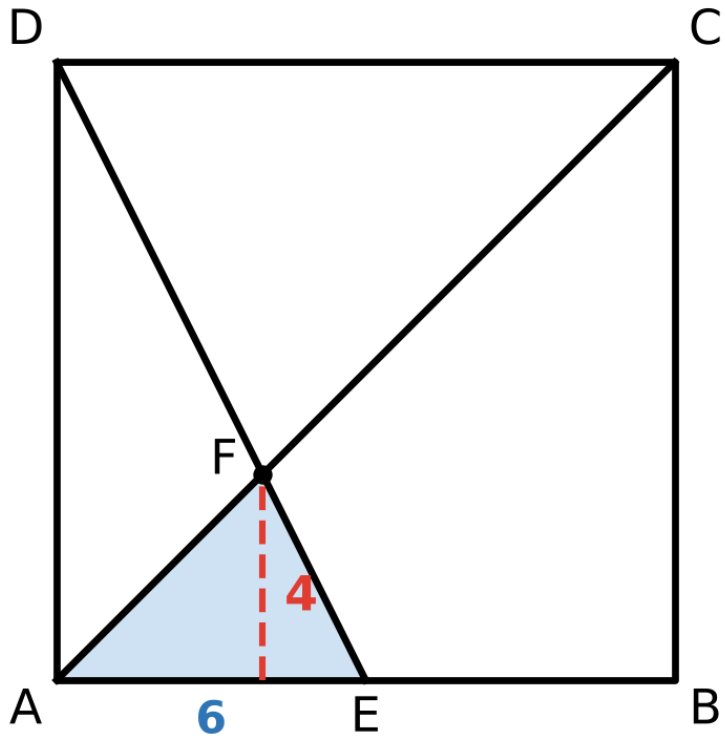
CONCLUSIÓN

Todos los lados del triángulo AEF miden **la mitad** que los del triángulo CDF. En particular, EF = ½ FD.

Paso 2. La altura de F y el área de AEF

PROBLEMA 6

Como EF = ½ FD, el punto F está a **1/3 del camino** de E a D. D está a 12 cm de AB, y E está sobre AB:



$$\text{altura de F} = \frac{12}{3} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Área } (AEF) = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

SOLUCIÓN a)

$$\boxed{12 \text{ cm}^2}$$

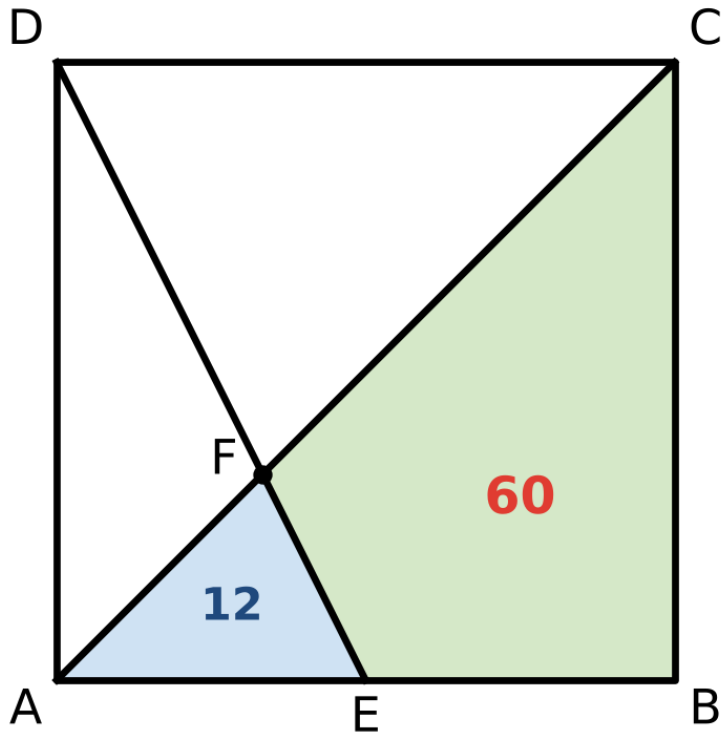
Paso 3. El cuadrilátero EBCF

PROBLEMA 6

El triángulo **ABC** (medio cuadrado) está formado por el triángulo AEF y el cuadrilátero EBCF:

$$\text{Área}\,(ABC) = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72\ \text{cm}^2$$

$$EBCF = 72 - 12 = 60\ \text{cm}^2$$



SOLUCIÓN b)

$$\boxed{60\ \text{cm}^2}$$

Otra forma: con coordenadas

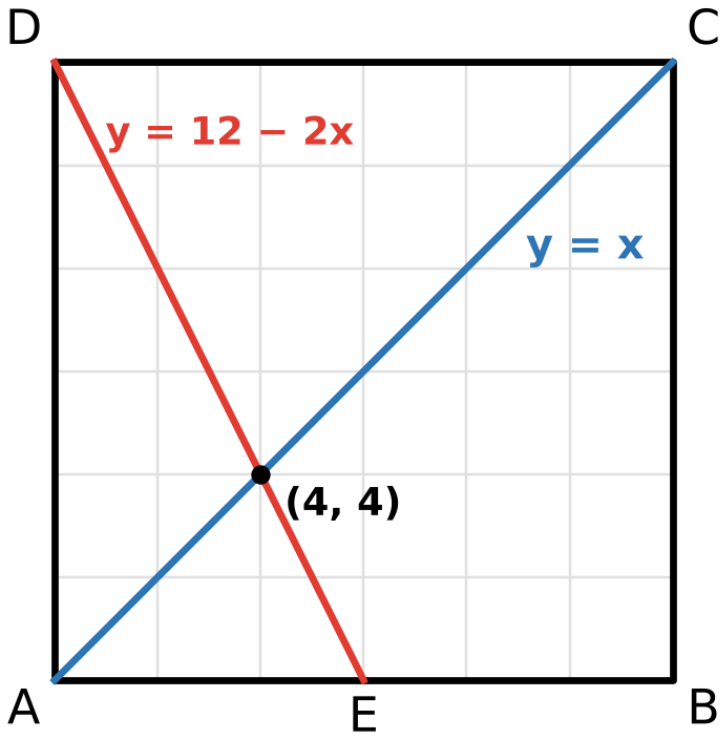
PROBLEMA 6

Ponemos el origen en A: A = (0, 0), B = (12, 0), D = (0, 12) y E = (6, 0).

Diagonal AC: $y = x$

Recta DE: $y = 12 - 2x$

Corte: $x = 12 - 2x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$



PUNTO F

$$\boxed{F = (4, 4)}$$

COMPROBACIÓN

La altura de F es 4 cm, como antes.

Las soluciones

1. Rectángulo troceado

a) $18\ \text{cm}^2$

b) $45\ \text{cm}^2$

2. Triángulo isósceles

$\angle ABD = 30°$

3. Cubo pintado

$3\times3\times3$: 8, 12, 6, 1

$4\times4\times4$: 8, 24, 24, 8

4. Cuadrados encajados

a) $12{,}5\ \text{cm}^2$

b) $187{,}5\ \text{cm}^2$

5. Estrella de cinco puntas

$A + B + C + D + E = 180°$

6. Diagonal en un cuadrado

a) $12\ \text{cm}^2$

b) $60\ \text{cm}^2$