Geometría · Nivel B

Soluciones **paso a paso** de los cuatro problemas

Olimpiada Matemática · 3.º y 4.º de ESO

LOS PROBLEMAS

1. El estanque helado
2. La cabra y el granero
3. La estrella del hexágono
4. Las lúnulas

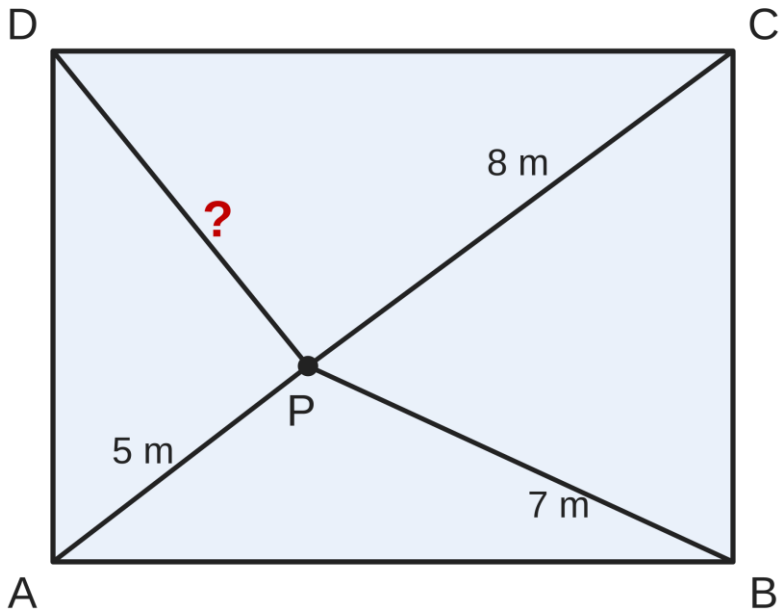
Problema 1. El estanque helado

Un estanque rectangular ABCD se ha helado. Una piedra cae en un punto P del interior y el hielo se rompe en **cuatro grietas rectas** desde P hasta las esquinas.

Antonio dice que basta con medir **tres** grietas: la cuarta se puede calcular.

a) Si $PA = 5$ m, $PB = 7$ m y $PC = 8$ m, ¿cuánto mide PD?

b) Si $PA = a$, $PB = b$ y $PC = c$, halla una fórmula para $x = PD$.

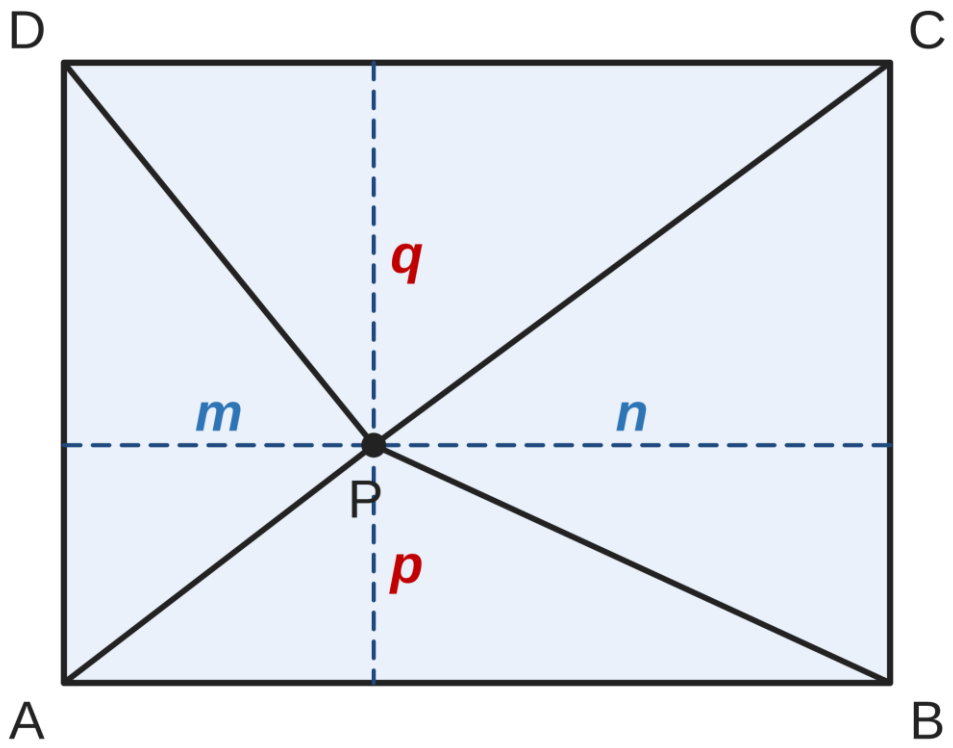


ANTES DE EMPEZAR

¿Ves algún triángulo rectángulo en la figura? ¿Te parece posible calcular PD sin conocer las medidas del estanque?

Paso 1. Partimos el estanque en cuatro rectángulos

Por P trazamos una paralela a AB y otra a AD. Cada grieta pasa a ser la **diagonal** de un rectángulo pequeño.



LLAMAMOS

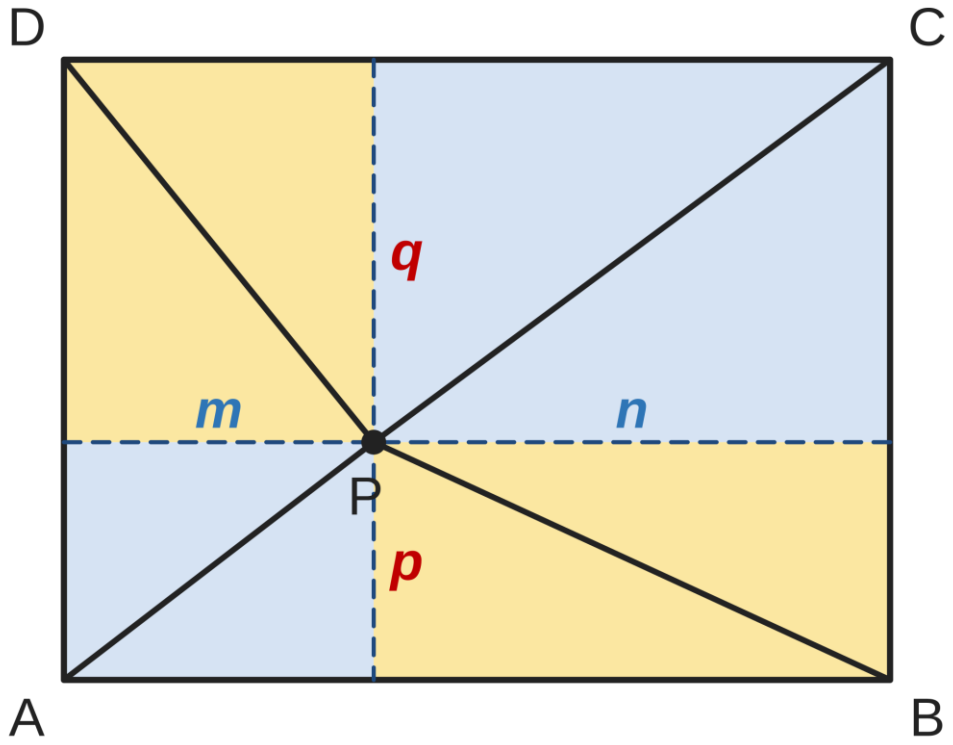
m y n: distancias de P a los lados AD y BC

p y **q**: distancias de P a los lados AB y CD

OBSERVA

Ya no necesitamos las medidas del estanque: solo usaremos m, n, p y q.

Paso 2. Pitágoras en cada rectángulo



TEOREMA DE PITÁGORAS

$$PA^2 = m^2 + p^2$$

$$PB^2 = n^2 + p^2$$

$$PC^2 = n^2 + q^2$$

$$PD^2 = m^2 + q^2$$

IDEA

Los rectángulos de **A** y **C** (azules) usan las cuatro letras; los de **B** y **D** (amarillos), también.

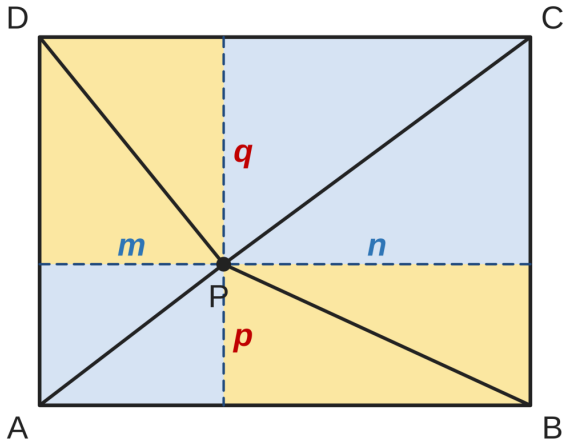
Paso 3. Sumamos las grietas opuestas

SUMANDO

$PA^2 + PC^2 = m^2 + p^2 + n^2 + q^2$

$PB^2 + PD^2 = n^2 + p^2 + m^2 + q^2$

Los segundos miembros son iguales, luego: $\boldsymbol{PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2}$



ATENCIÓN

La suma de los cuadrados de dos grietas **opuestas** es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos. ¡Da igual dónde caiga la piedra!

Paso 4. Calculamos la cuarta grieta

a) PA = 5, PB = 7, PC = 8

$$PD^2 = PA^2 + PC^2 - PB^2$$

$$PD^2 = 25 + 64 - 49 = 40$$

$$PD = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

SOLUCIÓN a)

$$PD = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32\ \text{m}$$

b) PA = a, PB = b, PC = c

$$x^2 = a^2 + c^2 - b^2$$

SOLUCIÓN b)

$$x = \sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)}$$

ATENCIÓN

Antonio tenía razón: **no hace falta** conocer las medidas del estanque ni dónde está exactamente P.

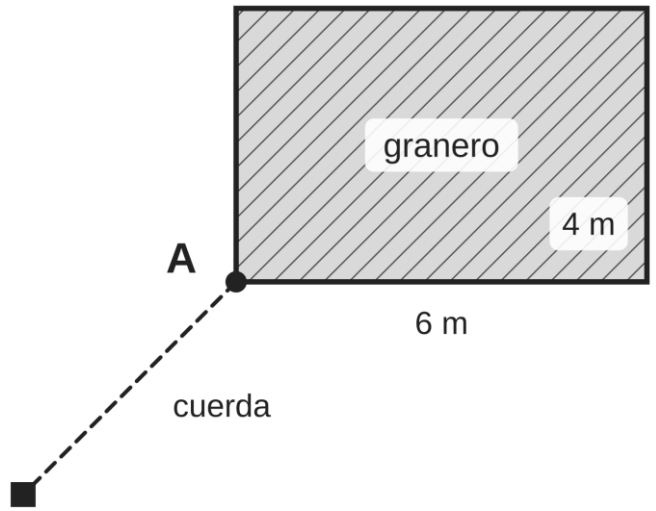
Problema 2. La cabra y el granero

Una cabra está atada con una cuerda de **8 m** a la esquina **A** de un granero rectangular de **6 m × 4 m**.

La cabra pasta por fuera: no puede entrar en el granero y la cuerda no lo atraviesa, aunque **sí puede rodear sus paredes**.

a) Dibuja la zona en la que puede pastar y calcula su área.

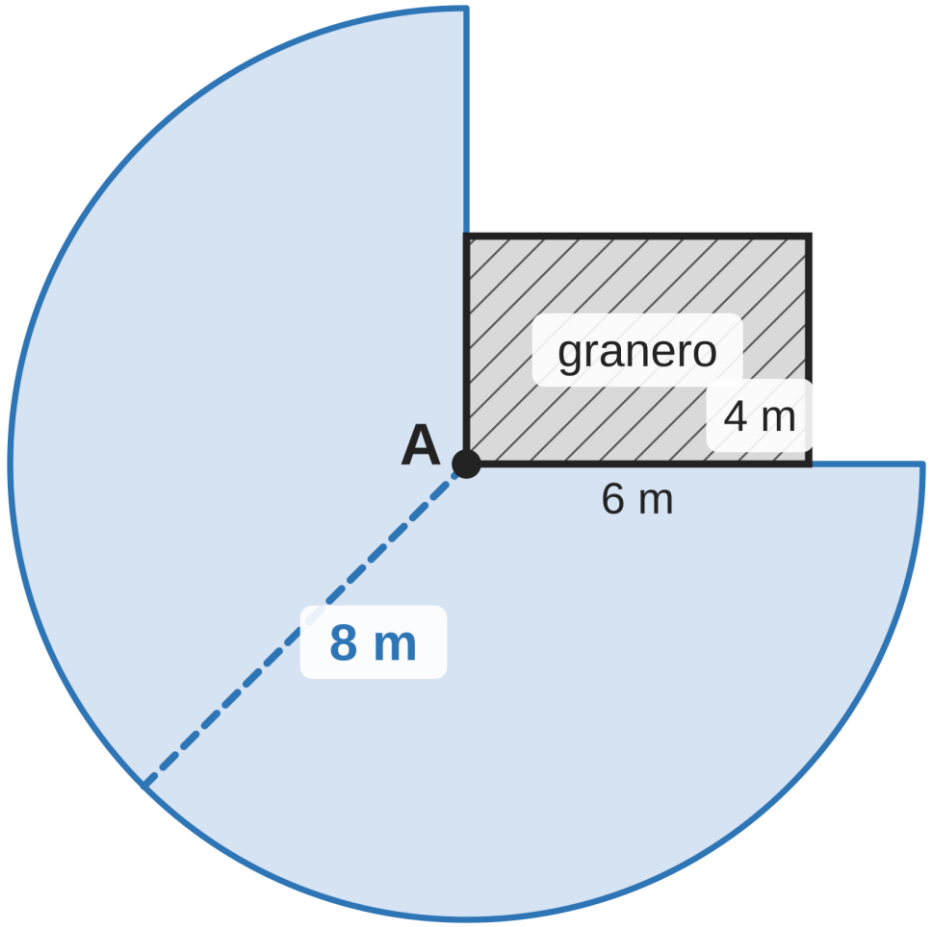
b) ¿Y si la cuerda midiera 10 m?



ANTES DE EMPEZAR

¿Hasta dónde llega la cabra si camina pegada a la pared de 6 m? ¿Y si va pegada a la de 4 m?

Paso 1. La zona sin rodear el granero



Con la cuerda tensa desde A, la cabra recorre un círculo de radio 8 m… salvo el **cuarto** que ocupa el granero.

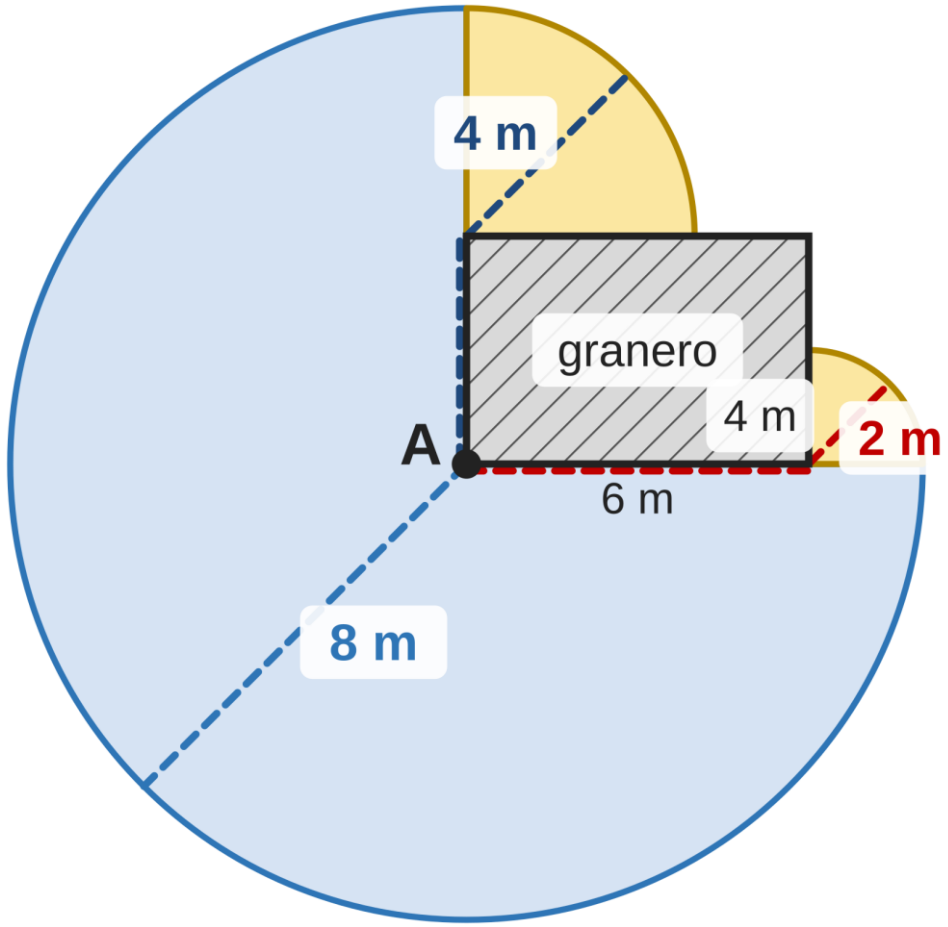
TRES CUARTOS DE CÍRCULO

$\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = \frac{3}{4} \cdot 64\pi = 48\pi\ \text{m}^2$

ATENCIÓN

¿Y la parte de detrás del granero? Para llegar ahí la cuerda tiene que **doblar una esquina**.

Paso 2. La cuerda rodea las paredes



AL DOBLAR CADA ESQUINA

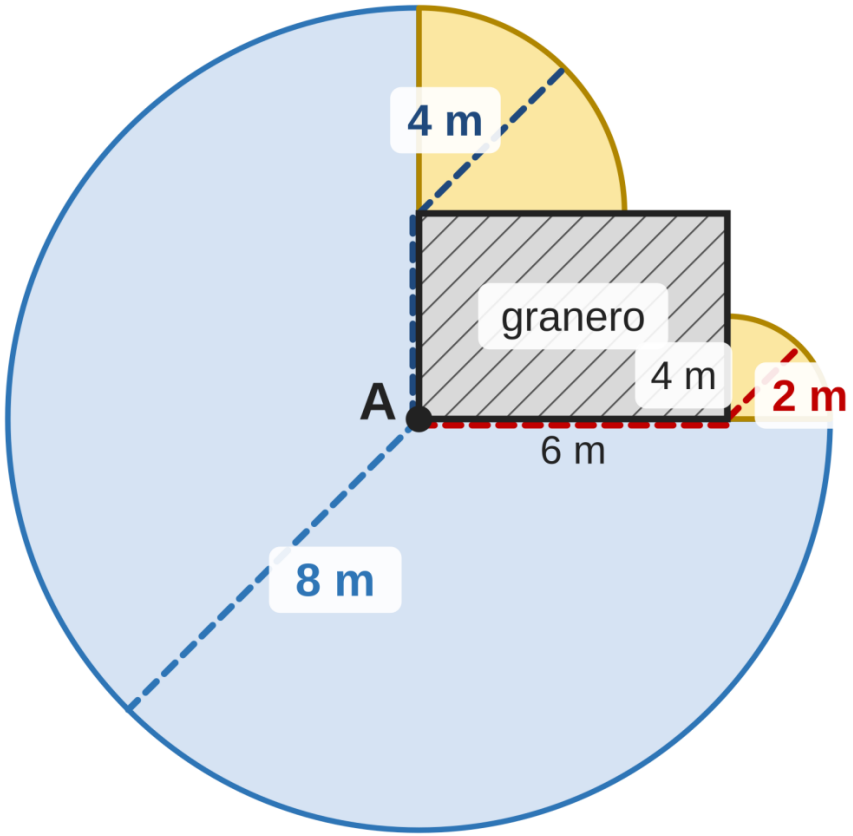
Pared de 6 m: sobran **8 − 6 = 2 m** → ¼ de círculo de radio 2

Pared de 4 m: sobran **8 − 4 = 4 m** → ¼ de círculo de radio 4

¿SE SOLAPAN?

No: el de radio 2 no llega a la otra esquina ($2 < 4$) y el de radio 4 tampoco ($4 < 6$). Podemos **sumar** las áreas.

Paso 3. Área total (cuerda de 8 m)



SUMAMOS LAS TRES PARTES

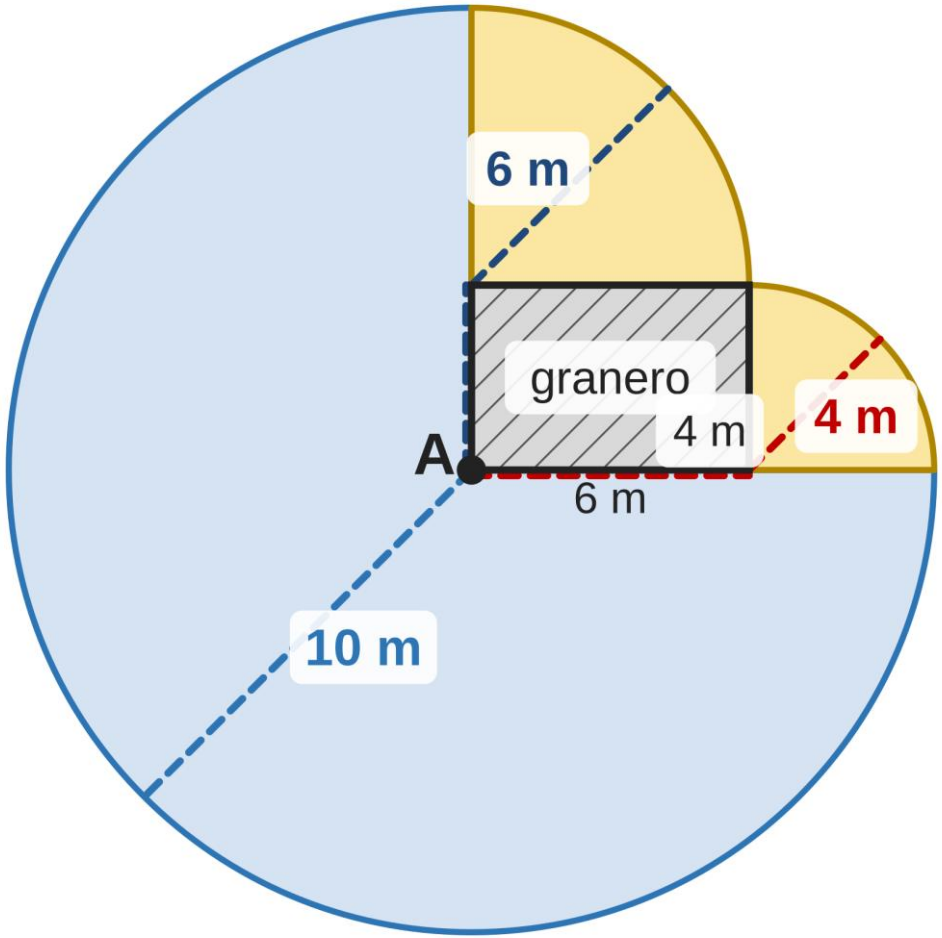
$$\text{Área} = \tfrac{3}{4}\cdot\pi\cdot 8^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4^2$$

$$\text{Área} = 48\pi + \pi + 4\pi$$

SOLUCIÓN a)

$$\text{Área} = 53\pi \approx 166{,}50\ \text{m}^2$$

Paso 4. ¿Y con una cuerda de 10 m?



MISMAS IDEAS

Sobrantes: $10 - 6 = 4$ m y $10 - 4 = 6$ m

$\text{Área} = \frac{3}{4}\cdot\pi\cdot 10^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 6^2$

$\text{Área} = 75\pi + 4\pi + 9\pi$

$$\text{Área} = 88\pi \approx 276{,}46\ \text{m}^2$$

ATENCIÓN

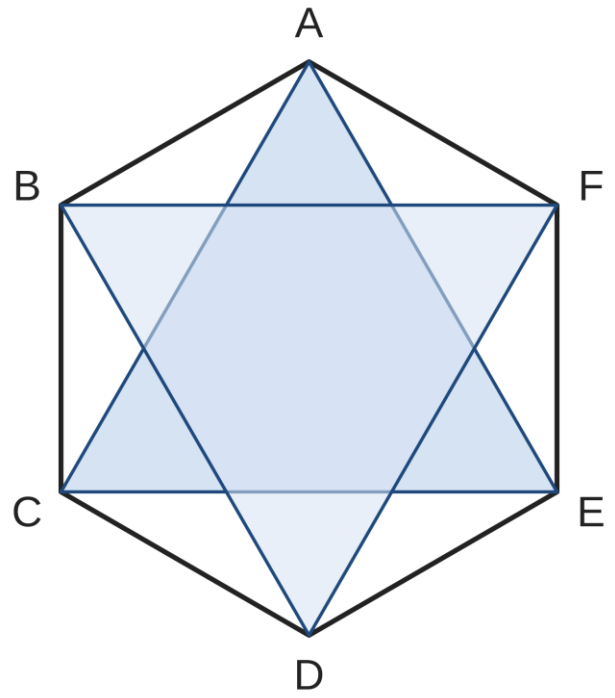
Los cuartos pequeños llegan **justo** a la esquina opuesta: se tocan, pero no se solapan.

Problema 3. La estrella del hexágono

Tenemos un hexágono regular ABCDEF de **60 cm²** de área.
Uniendo los vértices alternos se forman los triángulos **ACE** y **BDF**, que juntos dibujan una estrella de seis puntas.

a) ¿Cuál es el área del triángulo ACE?

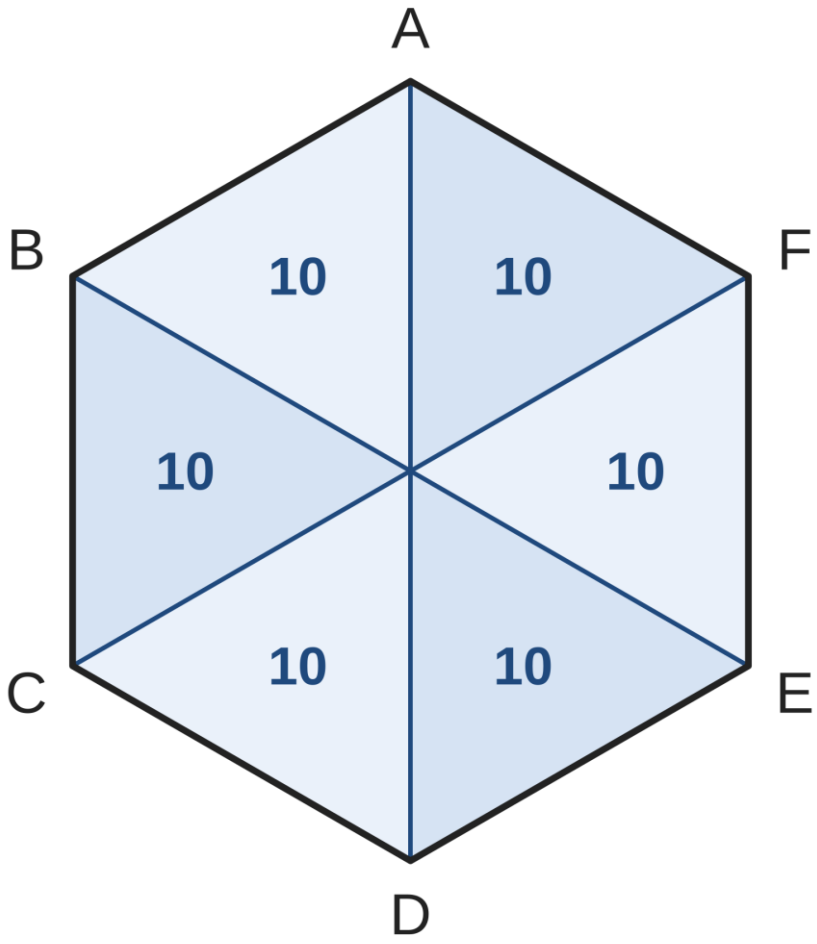
b) ¿Cuál es el área de la estrella?



ANTES DE EMPEZAR

¿Qué fracción del hexágono crees que ocupa el triángulo ACE? ¿Y la estrella?

Paso 1. Seis triángulos equiláteros



Unimos el centro **O** con los seis vértices. El hexágono regular queda dividido en **6 triángulos equiláteros iguales**.

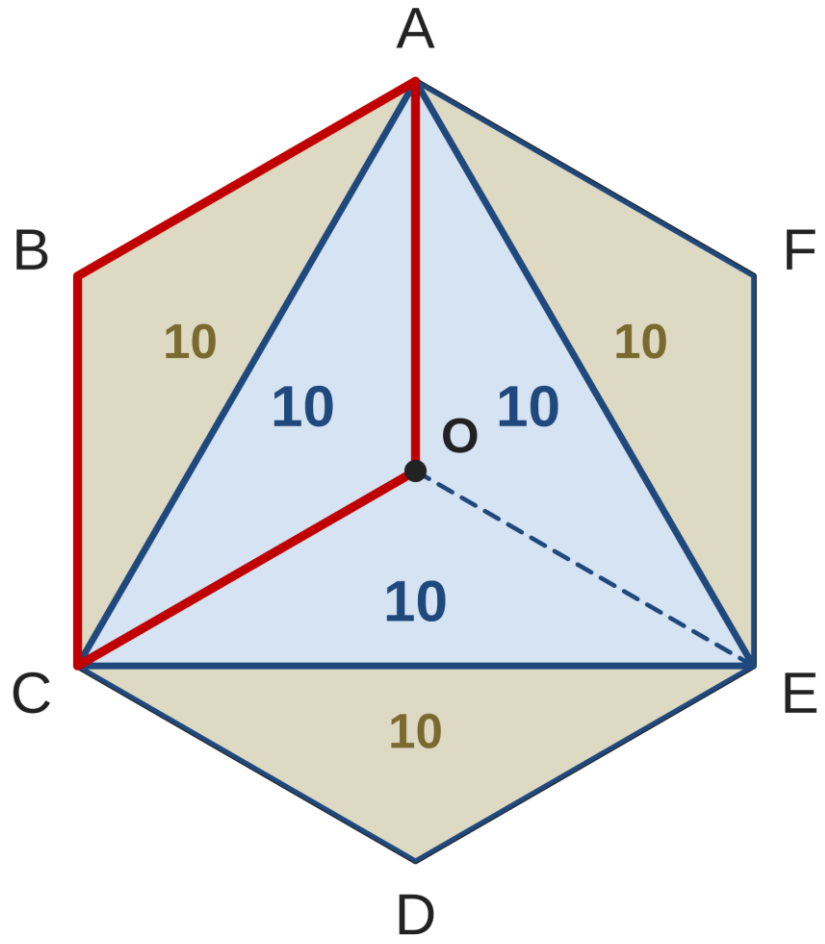
CADA TRIÁNGULO

$60 : 6 = 10\ \text{cm}^2$

IDEA

A partir de ahora mediremos todo en «triángulos de 10 cm^2».

Paso 2. Área del triángulo ACE



EL ROMBO OABC

Son dos triángulos equiláteros: mide **20 cm²**.

La diagonal **AC** lo parte en dos mitades iguales:

$OAC = ABC =$ $10\ \text{cm}^2$

Lo mismo pasa con **OCE** y **OEA**.

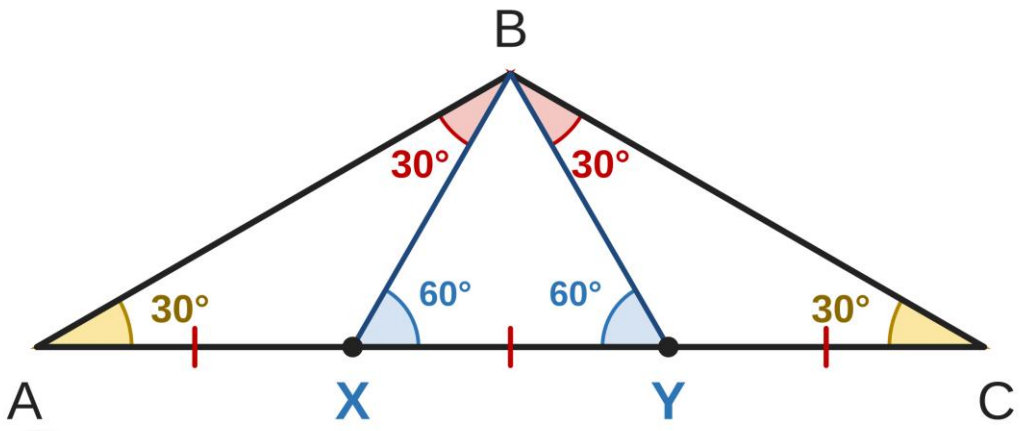
SOLUCIÓN a)

$ACE = 3 \cdot 10 =$ $30\ \text{cm}^2$

¡La **mitad** del hexágono!

Paso 3. El triángulo ABC, de cerca

Fuera de ACE quedan **ABC**, **CDE** y **EFA** (10 cm² cada uno). Las diagonales **BF** y **BD** cortan AC en **X** e **Y**.



ÁNGULOS

ABC: ángulos de **30°**, **120°**, **30°**.

En ABF (isósceles, 120° en A): **∠ABX = 30°**.

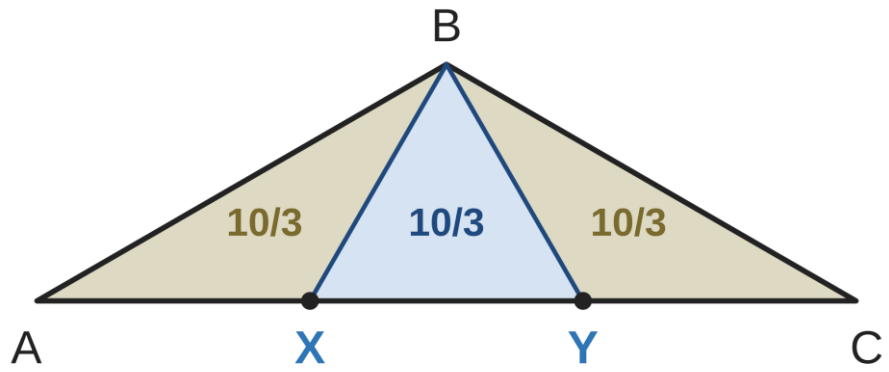
ABX tiene dos ángulos de 30° → $AX = BX$. Igual, $CY = BY$.

BXY tiene tres ángulos de 60° → **equilátero**.

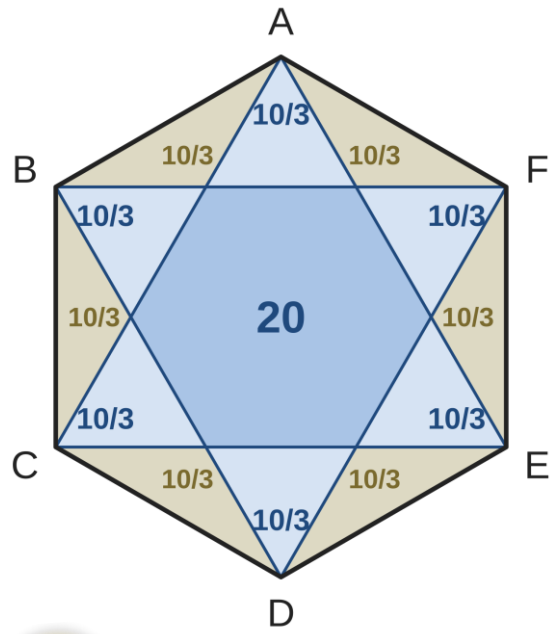
ATENCIÓN

$AX = BX = XY = BY = YC$: **X e Y dividen AC en tres partes iguales.**

Paso 4. Área de la estrella



ABX, BXY y BYC tienen **la misma altura** desde B y **bases iguales**: cada uno mide $10/3$ cm². Solo **BXY** (azul) es parte de la estrella.



SOLUCIÓN b)

$30 + 3 \cdot 10/3$

$= 40\ \text{cm}^2$

Dos tercios del hexágono

COMPROBACIÓN

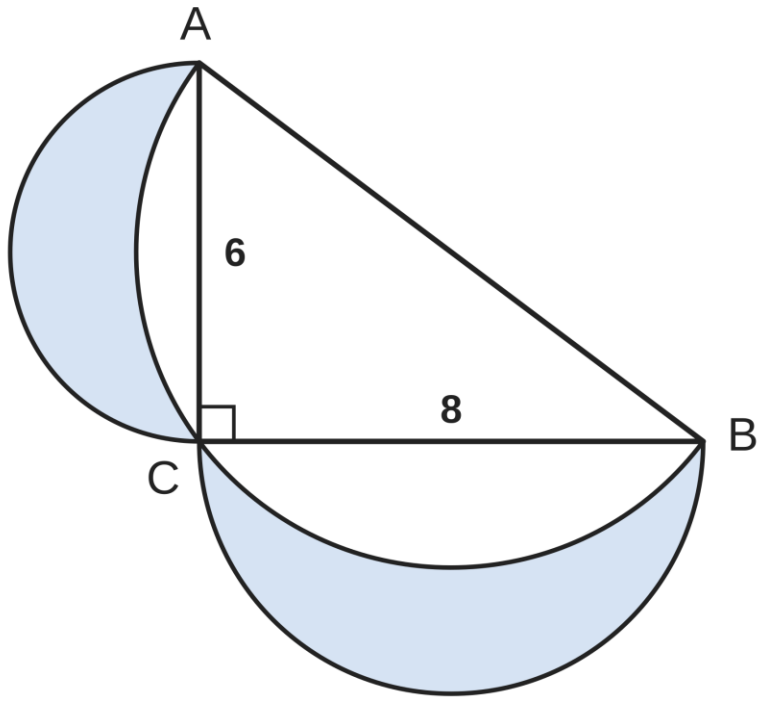
Hexágono central: $30 - 3 \cdot 10/3 = 20$ cm². Puntas: $6 \cdot 10/3 = 20$. Total: **40** ✓

Problema 4. Las lúnulas

El triángulo ABC es rectángulo en C, con catetos $CA = 6$ cm y $CB = 8$ cm.

Sobre cada cateto se dibuja un semicírculo hacia fuera. Después, la semicircunferencia de diámetro **AB** que queda del mismo lado que C.

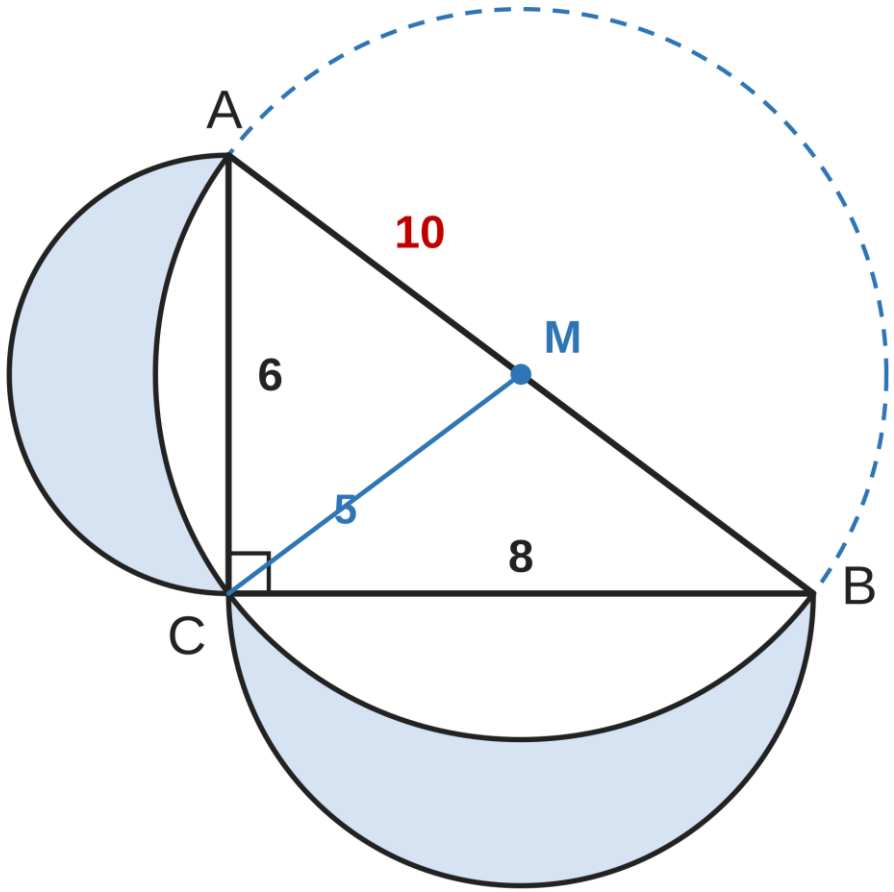
Calcula el área total de las **dos lúnulas** sombreadas.



ANTES DE EMPEZAR

Las lúnulas tienen bordes curvos. ¿Podemos obtenerlas **sumando y restando** figuras cuya área sí sabemos calcular?

Paso 1. La hipotenusa y el teorema de Tales



PITÁGORAS

$AB = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = \sqrt{100} =$ **10 cm**

TALES

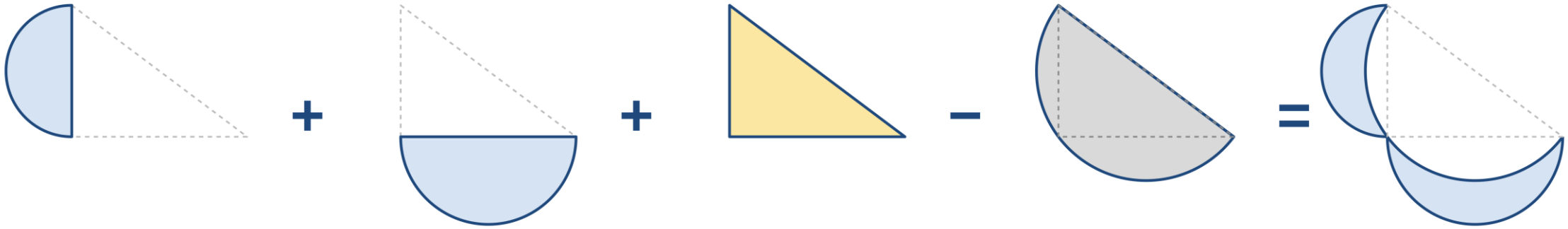
El ángulo en C es recto → **C está en la circunferencia** de diámetro AB (centro M, radio 5).

ATENCIÓN

El semicírculo grande pasa por C y **contiene** al triángulo.

Paso 2. Sumar y restar figuras

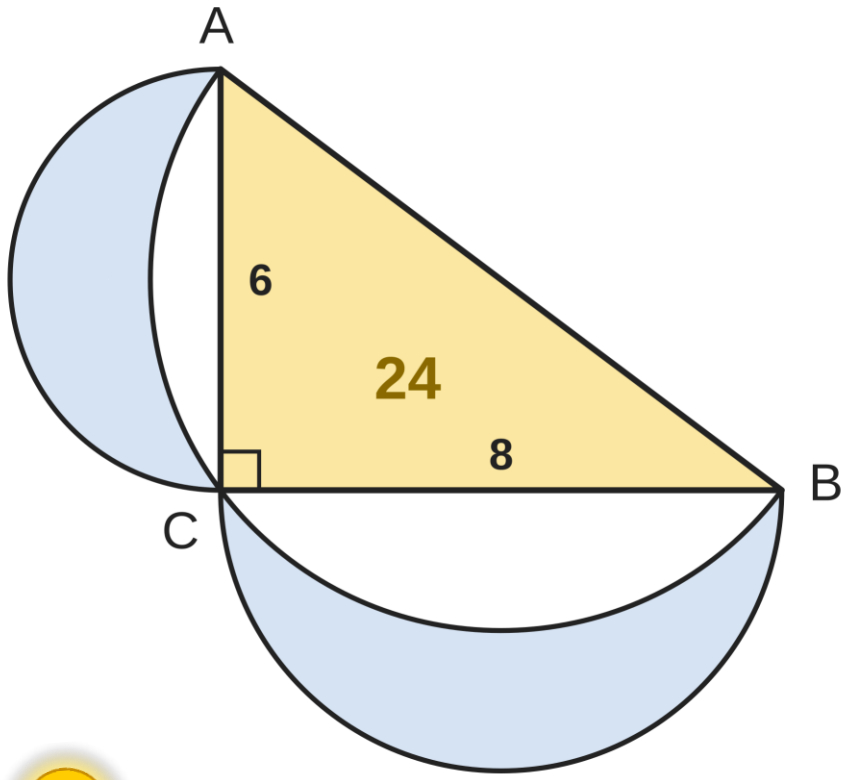
Los dos semicírculos pequeños más el triángulo forman la figura completa. Si le **quitamos** el semicírculo grande, quedan exactamente las dos lúnulas:



Semicírculo radio 3 | Semicírculo radio 4 | Triángulo 6 × 8 | Semicírculo radio 5 | Lúnulas

$$\text{Lúnulas} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot 3^2 + \tfrac{1}{2}\pi\cdot 4^2 + (6\cdot 8)/2 - \tfrac{1}{2}\pi\cdot 5^2$$

Paso 3. ¡Los π se anulan!



CALCULAMOS

$4{,}5\pi + 8\pi + 24 - 12{,}5\pi$

$= (4{,}5 + 8 - 12{,}5)\pi + 24 = 24$

SOLUCIÓN

$24\ \text{cm}^2$

¿POR QUÉ?

$3^2 + 4^2 = 5^2$

¡Otra vez Pitágoras!

ATENCIÓN

Área de las lúnulas = área del triángulo, sea cual sea el triángulo rectángulo.

Resumen de soluciones

1. EL ESTANQUE

$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

a) $2\sqrt{10} \approx 6{,}32\ \text{m}$

b) $\sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)}$

2. LA CABRA

a) $53\pi \approx 166{,}50\ \text{m}^2$

b) $88\pi \approx 276{,}46\ \text{m}^2$

3. LA ESTRELLA

a) $30\ \text{cm}^2$ (½ del hexágono)

b) $40\ \text{cm}^2$ (⅔ del hexágono)

4. LAS LÚNULAS

$24\ \text{cm}^2$

= área del triángulo

La clave común: **descomponer** la figura en piezas que sabemos medir y usar **Pitágoras**.