Azar y datos

Problemas de estadística y probabilidad · Nivel B

En las olimpiadas, los problemas de probabilidad casi nunca piden una fórmula: piden **contar bien** o **encontrar una forma inteligente de mirar el experimento**. Y los de estadística suelen esconder un problema de álgebra detrás de la media o de la desviación típica. Los problemas de esta ficha (**nivel B**) exigen una idea más profunda y, en algún apartado, contenidos de 2.º (sucesiones, integrales).

Herramientas que vas a necesitar

Regla de Laplace. Si todos los resultados son igual de probables, $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

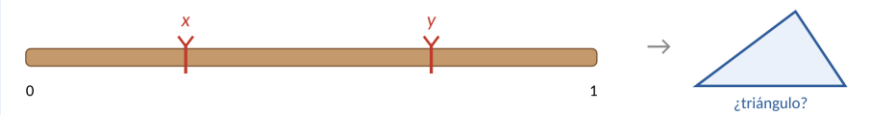
Suceso contrario. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Muchas veces es más fácil contar lo que *no* queremos.

Probabilidad condicionada. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$: es la probabilidad de A *sabiendo* que ha ocurrido B.

Media y desviación típica de n datos $x_1, \ldots, x_n$: $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ y $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$.

Nivel B

Problema B1. Romper un palo

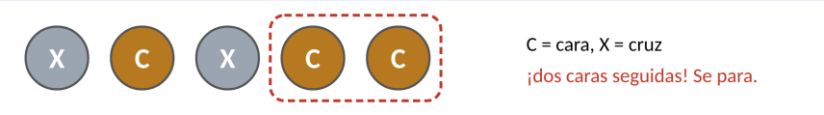


a) Se eligen al azar, de forma independiente y uniforme, dos puntos en un palo de longitud 1, y se rompe el palo por esos dos puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que con los tres trozos se pueda construir un triángulo?

b) Ahora se rompe primero el palo por un punto elegido al azar y, después, se rompe el trozo **más largo** por otro punto elegido al azar. ¿Cuál es ahora la probabilidad? (Este apartado necesita integrales.)

Problema B2. Dos caras seguidas

Se lanza una moneda equilibrada repetidamente hasta que salen dos caras seguidas, y entonces se para.



a) ¿Cuál es la probabilidad de parar exactamente en el quinto lanzamiento?

b) Sea a_n el número de secuencias de n lanzamientos que terminan, por primera vez, con dos caras seguidas. Demuestra que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 4$ y deduce la probabilidad de parar exactamente en el lanzamiento n.

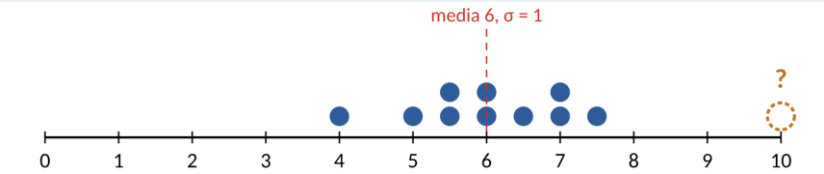
c) ¿Cuántos lanzamientos hacen falta, en promedio?

Problema B3. Ningún dato se escapa demasiado

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales ($n \geq 2$) con media $\bar{x}$ y desviación típica σ.

a) Demuestra que todos los datos cumplen $|x_i - \bar{x}| \leq \sigma\sqrt{n-1}$.

b) Las notas de un grupo de 10 alumnos tienen media 6 y desviación típica 1. ¿Puede algún alumno haber sacado un 10? ¿Cuál es la nota más alta posible? Da un ejemplo de notas en el que se alcance.



Pistas

B1. Llama x e y a los dos puntos. El par (x, y) es un punto al azar del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, y la probabilidad es un área. Tres longitudes que suman 1 forman triángulo si y solo si **cada una es menor que** $1/2$. En b), si el trozo largo mide L, calcula primero la probabilidad para un L fijo.

B2. Mira cómo empieza una secuencia válida: con cruz, o con cara y después cruz. Para c), llama E al número medio de lanzamientos que faltan cuando «empiezas de cero» y E' al que falta cuando acabas de sacar una cara.

B3. Trabaja con las desviaciones $d_i = x_i - \bar{x}$, que suman 0. Fíjate en d_1 y usa que $\sum_{i\geq 2} \left(d_i + \frac{d_1}{n-1}\right)^2 \geq 0$.