Problemas de geometría

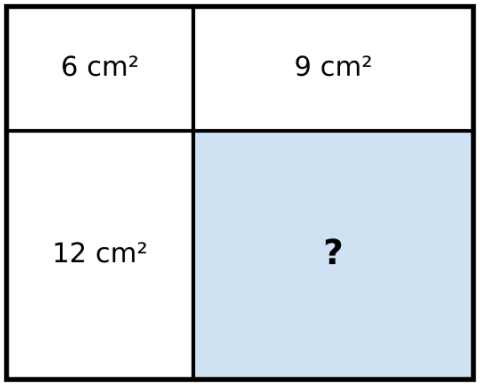
Nivel A (1º-2º ESO)

Problema 1. El rectángulo troceado

Un rectángulo se divide en cuatro rectángulos más pequeños mediante una recta paralela a la base y otra paralela a la altura, como en la figura. El rectángulo de arriba a la izquierda tiene un área de 6 cm², el de arriba a la derecha 9 cm² y el de abajo a la izquierda 12 cm².

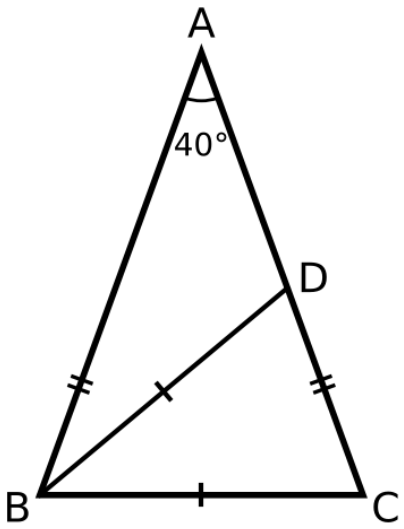
a) ¿Cuál es el área del rectángulo de abajo a la derecha?

b) ¿Cuál es el área del rectángulo grande?



Problema 2. El triángulo isósceles

En el triángulo ABC se cumple AB = AC y el ángulo en A mide 40°. Sobre el lado AC se toma un punto D de modo que BD = BC. ¿Cuánto mide el ángulo ABD?

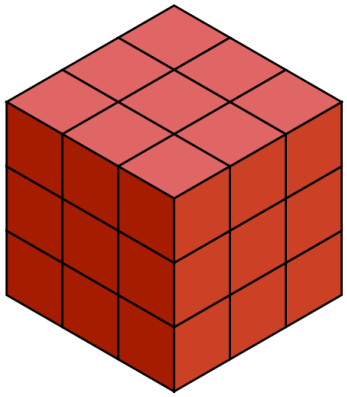


Problema 3. El cubo pintado

Se construye un cubo grande pegando 27 cubitos iguales (3 × 3 × 3). Después se pinta de rojo toda la superficie exterior del cubo grande y se vuelve a separar en cubitos.

a) ¿Cuántos cubitos tienen exactamente 3 caras pintadas? ¿Y 2? ¿Y 1? ¿Y ninguna?

b) Repite el apartado anterior para un cubo de 4 × 4 × 4.

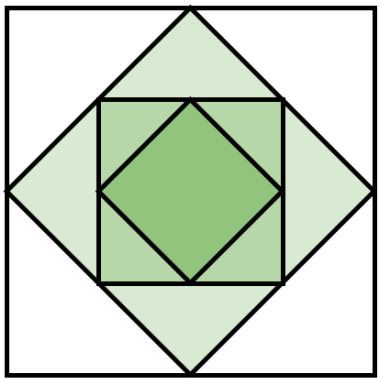


Problema 4. Cuadrados encajados

Tenemos un cuadrado de 10 cm de lado. Uniendo los puntos medios de sus lados obtenemos un segundo cuadrado. Uniendo los puntos medios de los lados del segundo obtenemos un tercero, y de la misma forma un cuarto.

a) ¿Cuál es el área del cuarto cuadrado?

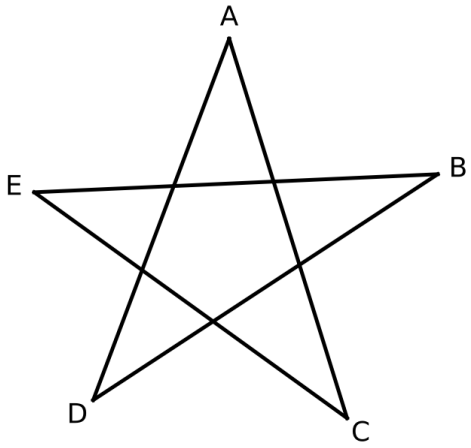
b) ¿Cuánto suman las áreas de los cuatro cuadrados?



Fase provincial

Problema 5. La estrella de cinco puntas

Dibujamos cinco puntos A, B, C, D, E como vértices de un pentágono cualquiera, no necesariamente regular, y trazamos las cinco diagonales AC, CE, EB, BD y DA, que forman una estrella. Demuestra que la suma de los cinco ángulos de las puntas de la estrella es siempre 180°.

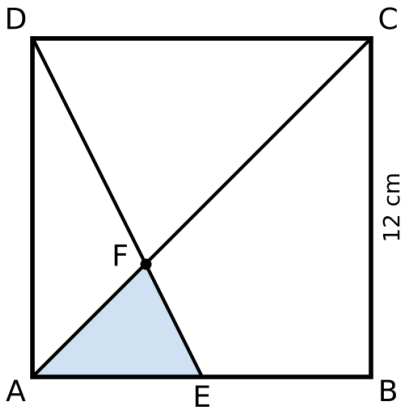


Problema 6. Diagonal y segmento en un cuadrado

En el cuadrado ABCD de 12 cm de lado, E es el punto medio del lado AB. El segmento DE corta a la diagonal AC en el punto F.

a) ¿Cuál es el área del triángulo AEF (sombreado)?

b) ¿Cuál es el área del cuadrilátero EBCF?



Soluciones

Problema 1. El rectángulo troceado

Llamamos *a* y *b* a las anchuras de las columnas izquierda y derecha, y *h* y *k* a las alturas de las filas de arriba y de abajo. Entonces a·h = 6, b·h = 9 y a·k = 12.

Los dos rectángulos de arriba tienen la misma altura, así que sus áreas están en la misma proporción que sus anchuras: b/a = 9/6 = 3/2. La columna derecha es 1,5 veces más ancha que la izquierda, y lo mismo ocurre en la fila de abajo: el área buscada es 12 · 3/2 = **18 cm²**.

(Otra forma: el producto de las áreas en diagonal coincide, 6 · x = 9 · 12, luego x = 18.)

El área total es 6 + 9 + 12 + 18 = **45 cm²**.

Problema 2. El triángulo isósceles

Como AB = AC, los ángulos de la base son iguales: B = C = (180° − 40°)/2 = 70°.

El triángulo BCD también es isósceles, porque BD = BC. Sus ángulos iguales son los opuestos a esos lados, es decir, los ángulos en D y en C: ∠BDC = ∠BCD = 70°. Por tanto ∠DBC = 180° − 70° − 70° = 40°.

Finalmente, ∠ABD = ∠ABC − ∠DBC = 70° − 40° = **30°**.

Problema 3. El cubo pintado

a) Los cubitos con 3 caras pintadas son los de las esquinas: un cubo tiene **8** vértices. Los de 2 caras están en las aristas sin contar las esquinas: 12 aristas con 1 cubito cada una, **12**. Los de 1 cara están en el centro de cada cara: 6 caras con 1 cubito, **6**. Sin pintar queda solo el cubito central, **1**. Comprobación: 8 + 12 + 6 + 1 = 27.

b) Con 4 × 4 × 4 = 64 cubitos: 3 caras, **8** (esquinas); 2 caras, 12 aristas × 2 = **24**; 1 cara, 6 caras × 4 = **24**; ninguna, el cubo interior 2 × 2 × 2 = **8**. Comprobación: 8 + 24 + 24 + 8 = 64.

Problema 4. Cuadrados encajados

Al unir los puntos medios, el cuadrado inicial queda dividido en el cuadrado interior y cuatro triángulos en las esquinas. Si trazamos los segmentos que unen puntos medios opuestos del cuadrado grande (que son las diagonales del interior), el cuadrado grande queda partido en 4 cuadraditos iguales, y cada uno queda cortado por la mitad: una mitad dentro del cuadrado interior y otra fuera. Por tanto, **cada cuadrado tiene la mitad de área que el anterior**.

Áreas: 100, 50, 25 y **12,5 cm²**. Suma: 100 + 50 + 25 + 12,5 = **187,5 cm²**.

Problema 5. La estrella de cinco puntas

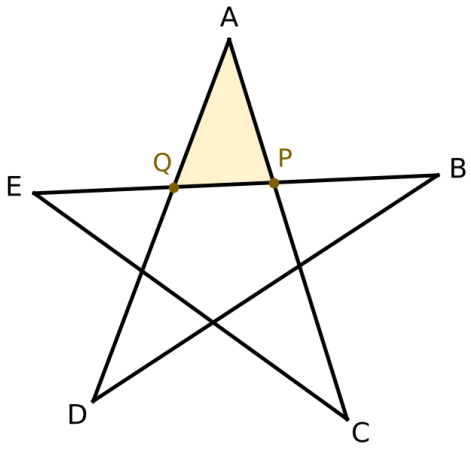
Llamamos A, B, C, D, E también a los ángulos de las puntas. La diagonal BE corta a AC en un punto P y a AD en un punto Q (ver figura).

Fijémonos en el triángulo BQD. Sus ángulos en B y en D son precisamente las puntas B y D de la estrella. El ángulo AQP es el ángulo exterior de ese triángulo en Q, y un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes, así que ∠AQP = B + D.

Del mismo modo, en el triángulo EPC los ángulos en E y en C son las puntas E y C, y ∠APQ es su ángulo exterior en P, así que ∠APQ = E + C.

En el triángulo APQ (sombreado) los tres ángulos suman 180°: A + ∠APQ + ∠AQP = 180°, es decir, **A + B + C + D + E = 180°**.

Comprobación con la estrella regular: cada punta mide 36° y 5 · 36° = 180°.



Problema 6. Diagonal y segmento en un cuadrado

a) Los lados AB y CD son paralelos, así que los triángulos AEF y CDF son semejantes (los ángulos en F son opuestos por el vértice y los otros son alternos internos). La razón de semejanza es AE/CD = 6/12 = 1/2. Por eso EF es la mitad de FD: F está a 1/3 del camino de E a D.

Como E está sobre AB y D está a 12 cm de AB, la altura de F sobre el lado AB es 12/3 = 4 cm. El área del triángulo AEF es (6 · 4)/2 = **12 cm²**.

b) El triángulo ABC tiene área 12 · 12 / 2 = 72 cm² y está formado por el triángulo AEF y el cuadrilátero EBCF. Por tanto, el área de EBCF es 72 − 12 = **60 cm²**.

Otra forma, con coordenadas: A = (0,0), B = (12,0), D = (0,12). La diagonal AC es y = x y la recta DE es y = 12 − 2x; se cortan en F = (4,4).

Notas para el profesorado

- Los problemas 1 y 4 admiten razonamientos visuales sin álgebra; conviene valorar el dibujo.
- En el problema 2 es habitual equivocarse al identificar qué ángulos son iguales en el triángulo BCD: son los opuestos a los lados iguales.
- El problema 5 puede plantearse primero con la estrella regular (36° por punta) y pedir después la demostración general.
- En el problema 6, quien no conozca la semejanza puede resolverlo con coordenadas.