Azar y datos

Problemas de estadística y probabilidad · Nivel A

En las olimpiadas, los problemas de probabilidad casi nunca piden una fórmula: piden **contar bien** o **encontrar una forma inteligente de mirar el experimento**. Y los de estadística suelen esconder un problema de álgebra detrás de la media o de la desviación típica. Los problemas de esta ficha (**nivel A**) se resuelven con las herramientas de 1.º de Bachillerato: contar con cuidado, probabilidad condicionada y parámetros estadísticos.

Herramientas que vas a necesitar

Regla de Laplace. Si todos los resultados son igual de probables, $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

Suceso contrario. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Muchas veces es más fácil contar lo que *no* queremos.

Probabilidad condicionada. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$: es la probabilidad de A *sabiendo* que ha ocurrido B.

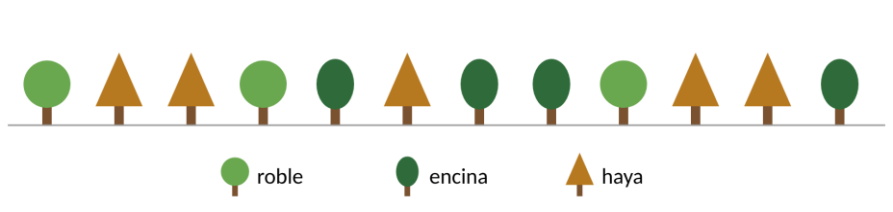
Media y desviación típica de n datos $x_1, \ldots, x_n$: $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ y $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$.

Nivel A

Problema A1. Árboles en fila

OME, fase local 2009-10.

Un jardinero planta en una fila, en orden aleatorio, 3 robles, 4 encinas y 5 hayas. Todas las ordenaciones son igual de probables. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos hayas seguidas?



Problema A2. Cinco números misteriosos

Cinco números enteros positivos tienen media 5, mediana 5 y una única moda, que vale 8.



a) Halla los cinco números y demuestra que no hay otra posibilidad.

b) Calcula su desviación típica.

c) ¿Se puede añadir un sexto número entero positivo de forma que la mediana siga siendo 5 y la moda siga siendo única e igual a 8?

Problema A3. Las tres cartas



En una bolsa hay tres cartas: una roja por las dos caras, otra blanca por las dos caras y otra roja por una cara y blanca por la otra. Se saca una carta al azar y se coloca sobre la mesa sin mirarla; la cara que queda a la vista es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la cara oculta también sea roja?

Muchas personas responden $1/2$. ¿Tienen razón?

Pistas

A1. No coloques los 12 árboles a la vez. Coloca primero los 7 que no son hayas: ¿cuántos huecos quedan para las hayas (contando los extremos)?

A2. Ordena los números: $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. ¿Quién es c? ¿Cuánto suman los cinco? ¿Cuántas veces tiene que aparecer el 8, y dónde?

A3. No cuentes cartas: cuenta **caras rojas**. Hay tres caras rojas posibles a la vista y todas son igual de probables.

Soluciones

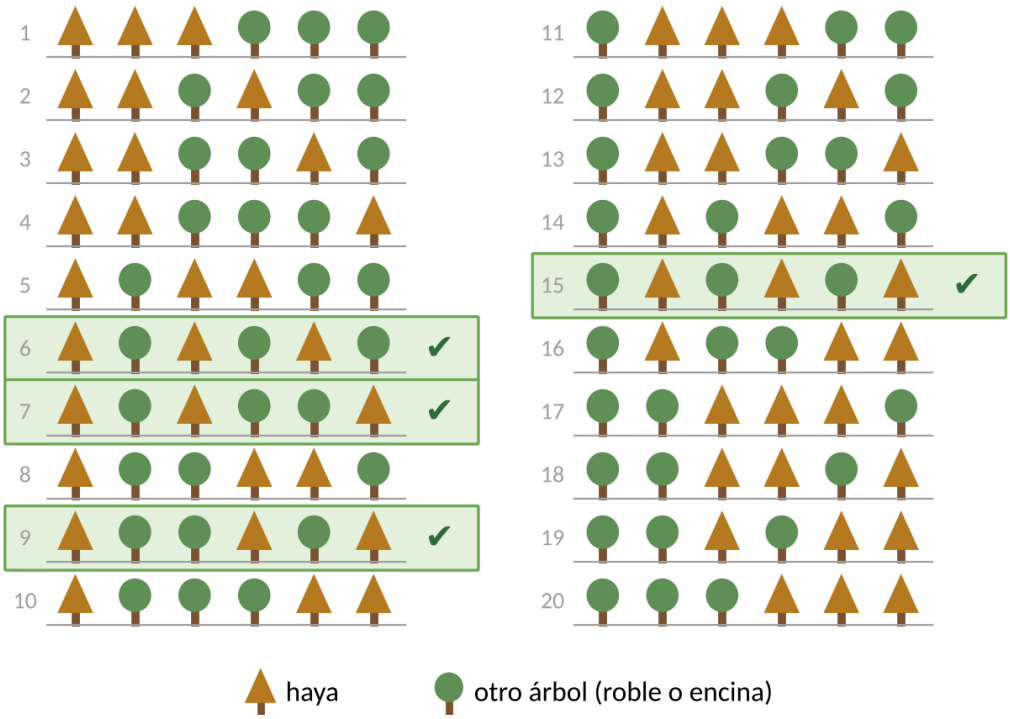
A1

Este problema se puede resolver de varias maneras. Las primeras son intuitivas y sirven desde 1.º de ESO; las últimas usan números combinatorios y factoriales. Todas llevan al mismo resultado.

Idea clave para todas: para saber si hay dos hayas seguidas da igual que un árbol sea roble o encina. Basta con distinguir **haya (H)** y **otro árbol (O)**.

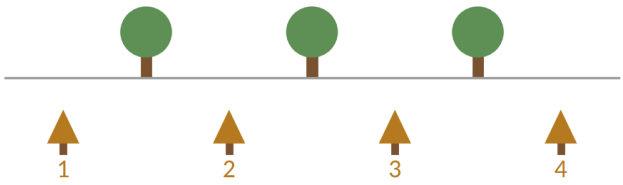
Solución 1. Dibujando un caso pequeño (1.º ESO)

Antes de atacar los 12 árboles probamos con 6: 3 hayas y 3 árboles de otro tipo. Dibujamos todas las filas posibles de forma ordenada (primero las que empiezan por haya, luego las demás). Salen 20, y solo en 4 de ellas no hay dos hayas juntas:



$$P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

¿Por qué salen 4? En las filas buenas las hayas siempre están separadas por otros árboles. Si colocamos primero los 3 árboles que no son hayas, quedan 4 huecos (contando los dos extremos) y cada haya tiene que ir en un hueco distinto. Elegir 3 huecos de 4 es lo mismo que elegir cuál se queda vacío: 4 formas.

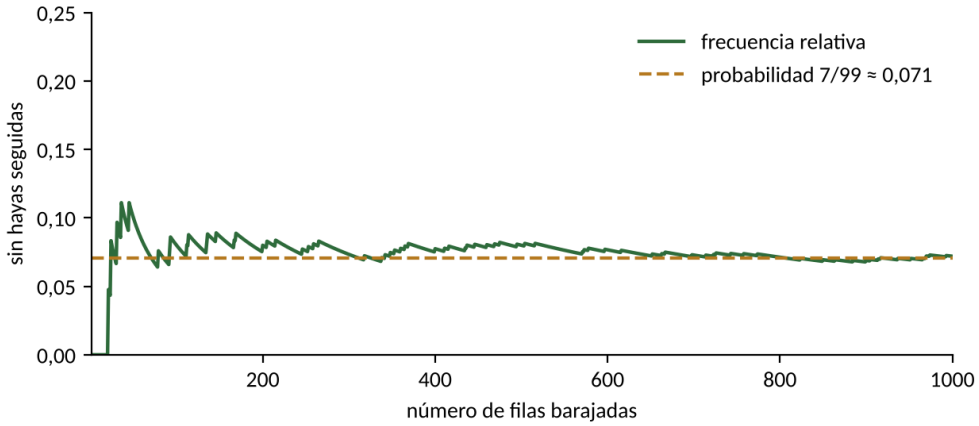


Con los 12 árboles del problema ocurre lo mismo: los 7 árboles que no son hayas dejan 8 huecos para las 5 hayas. Pero ahora hay demasiadas filas para dibujarlas todas, así que hay que experimentar (solución 2) o encontrar una forma de contar sin dibujar (soluciones 3, 4 y 5).

Solución 2. Experimentando con tarjetas (1.º y 2.º ESO)

Preparamos 12 tarjetas: 5 con una H y 7 con una O. Las barajamos, las ponemos en fila y anotamos si hay dos H juntas. Repetimos muchas veces (juntando los resultados de toda la clase) y calculamos la frecuencia relativa del suceso «no hay dos hayas seguidas».

La gráfica muestra lo que ocurre al repetirlo 1000 veces con el ordenador: la frecuencia relativa va oscilando y acaba estabilizándose alrededor de 0,07.



Estimamos así que $P \approx 0{,}07$: aproximadamente 7 de cada 100 filas no tienen dos hayas seguidas. Es una estimación; para obtener el valor exacto hay que contar.

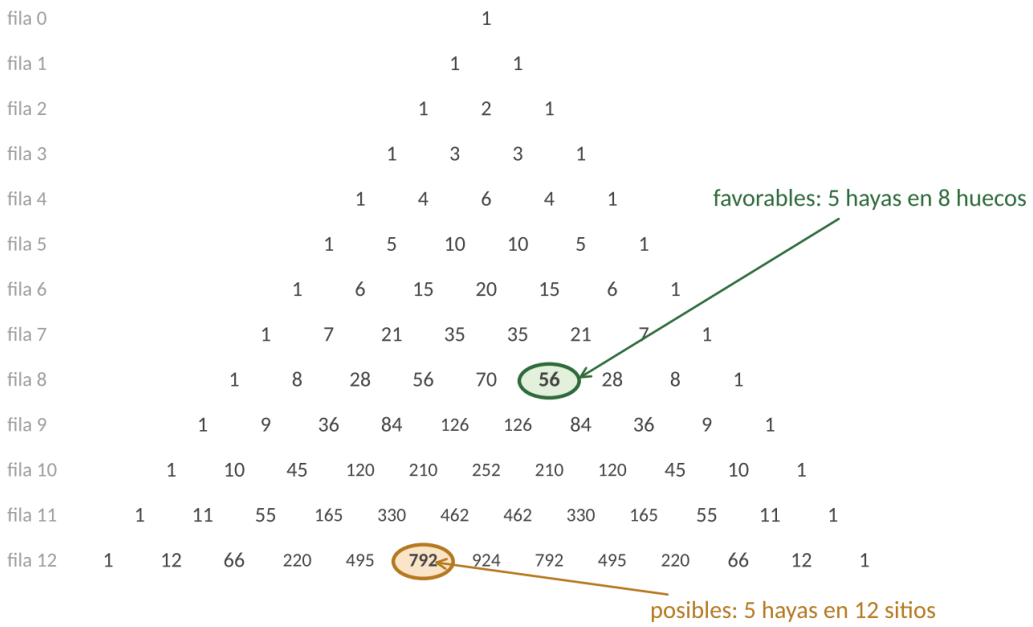
Solución 3. Con el triángulo de Pascal (2.º ESO)

Solo importa en qué sitios están las hayas. El número de formas de colocar k hayas en n sitios es el número que ocupa el lugar k (empezando a contar en 0) de la fila n del triángulo de Pascal.

¿Por qué? Fíjate en el último sitio de la fila. O hay una haya, y las $k-1$ restantes van en los $n-1$ sitios anteriores, o no la hay, y las k hayas van en esos $n-1$ sitios. Así que cada número es la suma de los dos que tiene encima, que es justo como se construye el triángulo.

Casos posibles: 5 hayas en 12 sitios → fila 12, lugar 5: **792**.

Casos favorables: 5 hayas en 8 huecos → fila 8, lugar 5: **56**.



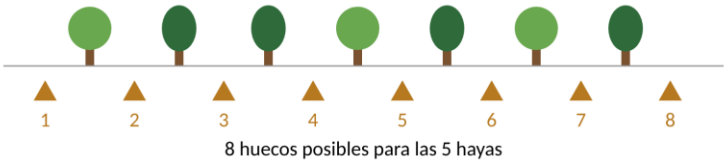
$$P = \frac{56}{792} = \frac{7}{99} \approx 0{,}071.$$

Comprobación con el caso pequeño: 3 hayas en 6 sitios → fila 6, lugar 3: 20; 3 hayas en 4 huecos → fila 4, lugar 3: 4. Coincide con lo que contamos dibujando.

Solución 4. Con números combinatorios (Bachillerato)

Como solo importa dónde van las hayas, los casos posibles son las formas de elegir 5 posiciones de 12 para ellas: $\binom{12}{5} = 792$.

Para los favorables, colocamos primero los 7 robles y encinas. Entre ellos y en los extremos quedan 8 huecos, y cada haya tiene que ir en un hueco distinto: $\binom{8}{5} = 56$ formas. Por tanto,



8 huecos posibles para las 5 hayas

$$P = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{12}{5}} = \frac{56}{792} = \frac{7}{99} \approx 0{,}071.$$

Solución 5. Con factoriales (Bachillerato)

Ahora consideramos los 12 árboles distintos entre sí, como si cada uno llevara una etiqueta.

Casos posibles: todas las ordenaciones de 12 árboles distintos, $12! = 479\,001\,600$.

Casos favorables: primero ordenamos los 7 árboles que no son hayas, de $7! = 5040$ formas. Quedan 8 huecos. La primera haya puede ir a cualquiera de los 8, la segunda a uno de los 7 que quedan, y así sucesivamente:



$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ formas de colocar las 5 hayas

$$\text{Favorables} = 7! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 7! \cdot \frac{8!}{3!} = 5040 \cdot 6720 = 33\,868\,800$$

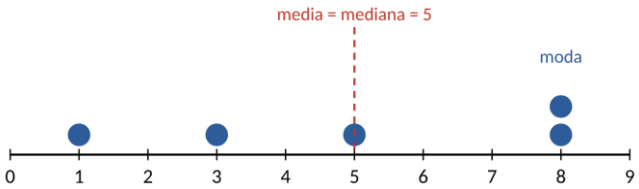
$$P = \frac{7! \cdot 8!}{3! \cdot 12!} = \frac{33\,868\,800}{479\,001\,600} = \frac{7}{99} \approx 0{,}071.$$

Otra forma de contar: si consideramos iguales los árboles de la misma especie, los casos posibles son permutaciones con repetición, $\frac{12!}{3!4!5!} = 27\,720$, y los favorables $\frac{7!}{3!4!} \cdot \binom{8}{5} = 35 \cdot 56 = 1960$. De nuevo $P = \frac{1960}{27\,720} = \frac{7}{99}$. La probabilidad no depende de cómo contemos, siempre que contemos igual los casos posibles y los favorables.

A2

a) Ordenamos: $a \le b \le c \le d \le e$. La mediana es $c = 5$ y la suma es $5 \cdot 5 = 25$. El 8 es la moda, así que aparece al menos dos veces; como es mayor que 5, solo puede estar en d y e: $d = e = 8$. Entonces $a + b = 25 - 5 - 16 = 4$, con $a \le b$: o bien $(1,3)$ o bien $(2,2)$. Pero con $(2,2)$ el 2 también aparecería dos veces y la moda no sería única. Los números son

$$1,\ 3,\ 5,\ 8,\ 8.$$



b) Las desviaciones respecto de la media 5 son $-4, -2, 0, 3, 3$, así que

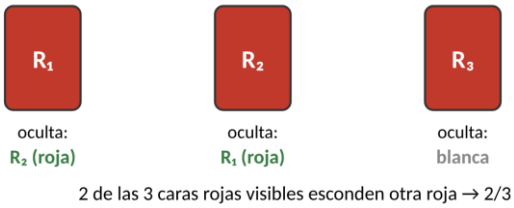
$$\sigma^2 = \frac{16 + 4 + 0 + 9 + 9}{5} = \frac{38}{5} = 7{,}6, \qquad \sigma = \sqrt{7{,}6} \approx 2{,}76.$$

c) Con seis datos la mediana es la media del tercero y del cuarto. Si el nuevo número y es menor que 5, el tercero y el cuarto son ≤ 5 y alguno es menor, así que la mediana baja de 5. Si $y > 5$, el tercero es 5 y el cuarto es mayor que 5, y la mediana sube. Así que necesariamente $y = 5$. Pero entonces el 5 aparece dos veces, igual que el 8, y la moda deja de ser única. **No se puede.**

A3

La respuesta $1/2$ es falsa. Ponemos nombre a las caras: la carta RR tiene las caras rojas R_1 y R_2, y la carta RB tiene la cara roja R_3. Sabemos que se ve una cara roja, y las tres son igual de probables. En dos de los tres casos (R_1 o R_2) la carta es la RR y la cara oculta es roja. Por tanto,

$$P(\text{oculta roja} \mid \text{vista roja}) = \frac{2}{3}.$$



Con la fórmula: $P(\text{vista roja}) = 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 0 = 1/2$ y $P(\text{carta RR}) = 1/3$, así que $P = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$. El error del $1/2$ es pensar «es la RR o la RB, una de dos», cuando la RR tiene el doble de caras rojas para dejar a la vista.