Problema 3 · Las taquillas

Solución paso a paso

> Hay **100 taquillas cerradas** y 100 alumnos. El alumno k cambia de estado las taquillas k, 2k, 3k… Al final, ¿**qué taquillas quedan abiertas**? ¿Por qué?

Paso 1 Simular con 10 taquillas

Con 100 taquillas es demasiado largo hacerlo a mano, así que empezamos con 10 taquillas y 10 alumnos. **A** = abierta, **C** = cerrada:

Tras el alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**
2	**A**	C	**A**	C	**A**	C	**A**	C	**A**	C
3	**A**	C	C	C	**A**	**A**	**A**	C	C	C
4	**A**	C	C	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	C	C
5	**A**	C	C	**A**	C	**A**	**A**	**A**	C	**A**
6	**A**	C	C	**A**	C	C	**A**	**A**	C	**A**
7	**A**	C	C	**A**	C	C	C	**A**	C	**A**
8	**A**	C	C	**A**	C	C	C	C	C	**A**
9	**A**	C	C	**A**	C	C	C	C	**A**	**A**
10	**A**	C	C	**A**	C	C	C	C	**A**	C

Al final quedan abiertas la **1, la 4 y la 9**. Son **cuadrados perfectos**. Conjetura: *con 100 taquillas quedarán abiertas las de los cuadrados perfectos*.

Paso 2 ¿Quién toca cada taquilla?

El alumno k toca la taquilla n solo si n es múltiplo de k, es decir, si **k es divisor de n**. Por tanto:

> **La taquilla n se toca tantas veces como divisores tiene n.**

Taquilla	Alumnos que la tocan (divisores)	Veces	Estado final
6	1, 2, 3, 6	4	Cerrada
7	1, 7	2	Cerrada
9	1, 3, 9	3	Abierta
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6	Cerrada
16	1, 2, 4, 8, 16	5	Abierta

Paso 3 Abierta o cerrada según la paridad

Todas empiezan cerradas. Cada vez que alguien toca una taquilla, cambia de estado: 1 vez → abierta, 2 veces → cerrada, 3 veces → abierta…

Así que una taquilla queda **abierta si se toca un número impar de veces**, es decir, si n tiene un **número impar de divisores**.

Paso 4 ¿Qué números tienen un número impar de divisores?

Los divisores van **en parejas**: si d divide a n, también lo divide n / d.

```
12:  1·12   2·6   3·4   → 6 divisores (par)
16:  1·16   2·8   4·4   → el 4 va solo: 5 divisores (impar)
```

Una pareja solo se "rompe" cuando d = n / d, es decir, cuando **n = d · d**. Eso solo pasa si n es un cuadrado perfecto.

> **Solución:** quedan abiertas las taquillas de los **cuadrados perfectos**: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100. En total, **10 taquillas**.

Problema 3 · Ampliaciones

Solución de las tarjetas de ampliación

Ampliación 1 · Taquillas tocadas exactamente 2 y 3 veces

- **Exactamente 2 veces:** números con exactamente 2 divisores (1 y él mismo), es decir, los **números primos**. Hay **25** entre 1 y 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, …, 89, 97.
- **Exactamente 3 veces:** números con 3 divisores. Tienen que ser cuadrados perfectos (número impar de divisores) y sus divisores son 1, p y p^2, con p primo. Son los **cuadrados de primos**: **4, 9, 25 y 49**.

Ampliación 2 · La taquilla que se toca más veces

Hay que buscar el número del 1 al 100 con más divisores. El máximo es **12 divisores**, y lo tienen cinco números:

Taquilla	Descomposición	Divisores
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	12
72	$2^3 \cdot 3^2$	12
84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	12
90	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	12
96	$2^5 \cdot 3$	12

Idea útil: si $n = p^a \cdot q^b \cdot r^c$, el número de divisores es **(a + 1)(b + 1)(c + 1)**. Por ejemplo, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ tiene $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ divisores.

Ampliación 3 · Con 1000 taquillas

Quedan abiertos los cuadrados perfectos hasta 1000: 1^2, 2^2, …, 31^2. Como $31^2 = 961 \leq 1000$ y $32^2 = 1024 > 1000$, quedan abiertas **31 taquillas**.

Ampliación 4 · Solo participan los alumnos impares

Ahora la taquilla n se toca tantas veces como **divisores impares** tiene. Queda abierta si ese número es impar.

- Si escribimos $n = 2^a \cdot m$ con m impar, los divisores impares de n son exactamente los divisores de m.
- Por el paso 4, m tiene un número impar de divisores solo si **m es un cuadrado perfecto**.
- Entonces $n = 2^a \cdot k^2$. Si a es par, n es un cuadrado; si a es impar, n es **el doble de un cuadrado**.

> **Solución:** quedan abiertas las taquillas que son un **cuadrado** o **el doble de un cuadrado**: 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 25, 32, 36, 49, 50, 64, 72, 81, 98 y 100. En total, **17 taquillas**.

Para la puesta en común

- Empieza por las pizarras que han simulado con pocas taquillas. La pregunta clave es: *«¿Por qué los cuadrados?»*. Si nadie llega, pide que escriban qué alumnos tocan la taquilla 12 y la 16, y que comparen.

Problema 4 · La fila de los cuadrados

Solución paso a paso

> Coloca los números del **1 al 15** en una fila de manera que **cada dos números vecinos sumen un cuadrado perfecto**.

Paso 1 ¿Qué cuadrados pueden salir?

La suma más pequeña posible es 1 + 2 = 3 y la más grande es 14 + 15 = 29. Así que las únicas sumas posibles son **4, 9, 16 y 25**.

Paso 2 Buscar los vecinos posibles de cada número

Número	Vecinos posibles	Número	Vecinos posibles
1	3, 8, 15	9	7
2	7, 14	10	6, 15
3	1, 6, 13	11	5, 14
4	5, 12	12	4, 13
5	4, 11	13	3, 12
6	3, 10	14	2, 11
7	2, 9	15	1, 10
8	1		

Se puede representar como un **grafo**: cada número es un punto y se unen con una línea los que suman un cuadrado.

Paso 3 Encontrar los extremos

El **8** solo tiene un vecino posible (el 1) y el **9** solo tiene uno (el 7). Un número con un solo vecino no puede estar en medio de la fila, porque ahí necesita dos. Así que:

> **El 8 y el 9 tienen que ir en los extremos de la fila.**

Paso 4 Construir la fila

Empezamos por el 8 y avanzamos. Casi siempre hay un solo camino posible, porque la mayoría de números solo tienen dos vecinos:

```
8 → 1      (único vecino del 8)
1 → 15     (con el 3 nos bloquearíamos después)
15 → 10 → 6 → 3 → 13 → 12 → 4 → 5 → 11 → 14 → 2 → 7 → 9
```

Solución: 8 – 1 – 15 – 10 – 6 – 3 – 13 – 12 – 4 – 5 – 11 – 14 – 2 – 7 – 9. Es la **única** solución (o la misma leída al revés). Sumas: 9, 16, 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 16 ✓

Problema 4 · Ampliaciones

Solución de las tarjetas de ampliación

Ampliación 1 · Del 1 al 10 y del 1 al 14: demostración

La clave es contar los números con un solo vecino (solo pueden ir en un extremo) o sin ningún vecino:

- Una fila tiene **solo 2 extremos**. Si hay 3 o más números con un solo vecino, es imposible.
- Si algún número **no tiene vecinos**, también es imposible.

Números	Por qué es imposible
1 al 10	El 2, el 4, el 5, el 8, el 9 y el 10 tienen un solo vecino (6 números para 2 extremos).
1 al 14	El 8, el 9 y el 10 tienen un solo vecino: 8 – 1, 9 – 7, 10 – 6 (3 números para 2 extremos).

Lo mismo pasa con cualquier n del 2 al 14: siempre hay algún número sin vecinos o al menos 3 números con un solo vecino. Al llegar al 15, el 10 gana un segundo vecino (10 + 15 = 25) y ya es posible.

Ampliación 2 · El número más pequeño

> **Solución:** el menor n para el que se puede hacer es **n = 15**.

Ampliación 3 · Del 1 al 16, al 17 y al 18

- **Del 1 al 16:** sí. Se añade el 16 al final, junto al 9 (9 + 16 = 25): 8 – 1 – 15 – 10 – 6 – 3 – 13 – 12 – 4 – 5 – 11 – 14 – 2 – 7 – 9 – 16.
- **Del 1 al 17:** sí. Se añade el 17 al otro extremo, junto al 8 (8 + 17 = 25): 16 – 9 – 7 – 2 – 14 – 11 – 5 – 4 – 12 – 13 – 3 – 6 – 10 – 15 – 1 – 8 – 17.
- **Del 1 al 18:** no. El 16, el 17 y el 18 tienen un solo vecino cada uno (16 – 9, 17 – 8, 18 – 7): son 3 números para 2 extremos.

Del 1 al 15, al 16 y al 17 hay una **única** solución. Además, se puede hacer con n = 23 y con cualquier n desde 25 en adelante. Es imposible entre el 18 y el 22, y con el 24.

Ampliación 4 · En círculo

En un círculo no hay extremos: **todos los números necesitan dos vecinos**. Por eso ningún número puede tener un solo vecino, y hacen falta muchos más números. El menor n que funciona es **n = 32**. Una solución:

```
1 – 8 – 28 – 21 – 4 – 32 – 17 – 19 – 30 – 6 – 3
– 13 – 12 – 24 – 25 – 11 – 5 – 31 – 18 – 7 – 29
– 20 – 16 – 9 – 27 – 22 – 14 – 2 – 23 – 26 – 10 – 15
(y el 15 vuelve al 1: 15 + 1 = 16)
```

Nota: estos resultados (n = 15, la unicidad, los valores imposibles y el círculo con n = 32) están comprobados por ordenador.

Para la puesta en común

- Busca un grupo que haya dibujado el grafo y construye la discusión a partir de su pizarra.
- La idea clave es: *«un número con un solo vecino tiene que ir en un extremo»*. Con ella se resuelve el problema y se demuestran los casos imposibles.
- Pregunta a la clase: *«¿Cuántos extremos tiene una fila? ¿Y un círculo?»*.